1. Es seien x, y, z reelle Zahlen ungleich 1 mit $xyz = 1$.

   (a) Man beweise die Ungleichung
   $$\frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{y^2}{(1-y)^2} + \frac{z^2}{(1-z)^2} \geq 1$$
   mit

   (b) Gleichheit für unendlich viele rationale Zahlen x, y, z ungleich 1.

2. Man beweise für alle positiven reellen Zahlen a, b, c die Ungleichung
$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq a + b + c\ .$$

3. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man zeige:
$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geq \frac{3}{8}\ .$$

4. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise:
$$\frac{3a^2 - 2ab - b^2}{3a^2 + 2ab + 3b^2} + \frac{3b^2 - 2bc - c^2}{3b^2 + 2bc + 3c^2} + \frac{3c^2 - 2ca - a^2}{3c^2 + 2ca + 3a^2} \geq 0\ .$$

5. Es seien $\alpha > 1$ eine reelle Zahl und $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Weiters seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen mit
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + x_k} = 1\ .$$
Man zeige:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + x_k^\alpha} \geq \frac{n}{1 + (n-1)^\alpha}\ .$$

6. Man beweise für alle positiven reellen Zahlen a, b, c:
$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2} \geq 3.$$

7. Es seien x, y, z nichtnegative reelle Zahlen. Man zeige:
$$\frac{1}{x^2 - xy + y^2} + \frac{1}{y^2 - yz + z^2} + \frac{1}{z^2 - zx + x^2} \geq \frac{12}{(x+y+z)^2}\ .$$

8. Es seien x, y, z nichtnegative reelle Zahlen. Man zeige:
$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{xy + yz + zx}\ .$$

9. Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Man beweise:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{6}{a+b+c} \geq 5\ .$$

10. Es seien n eine positive ganze Zahl und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen. Man beweise:
$$\sqrt{x_1^2 + 1} + 2\sqrt{x_2^2 + 1} + \ldots + n\sqrt{x_n^2 + 1} \geq \sqrt{(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n)^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4}}\ .$$