

Invarianten & Monovarianten

Invarianten

Eine Invariante ((halbwegs) wörtlich: „nicht veränderlich“) ist irgendetwas, das sich beim Durchführen einer bestimmten Operation nicht ändert. Durch dieses Gleichbleiben einer Eigenschaft können wir oft nützliche Schlüsse ziehen.

Beispiel 1. Auf einem Tisch liegen 2019 rote, 50 weiße und 29 grüne Gummibärchen. In jedem Zug frisst Nimbus Nimmersatt drei Gummibärchen, und zwar entweder drei gleichfarbige, oder von jeder Farbe genau eines. Ist es möglich, dass am Ende genau ein weißes Gummibärchen übrig bleibt?

Lösung. In jedem Zug bleiben die Differenzen zwischen den Anzahlen auf den drei Stapeln gleich modulo 3: Frisst Nimbus Nimmersatt von jeder Farbe eines, so bleiben die Differenzen gleich, und frisst er von einer Farbe drei, so bleibt diese Farbe in derselben Restklasse modulo 3 wie zuvor. Modulo 3 haben wir zu Beginn 0 rote, 2 weiße und 2 grüne Gummibärchen. Also sind nach jedem Zug modulo 3 gleich viele weiße wie grüne Gummibärchen vorhanden, daher kann kein weißes Gummibärchen alleine übrig bleiben. \square

Mögliche nützliche Invarianten können viele Formen annehmen:

- Restklassen (inkl. Parität = Restklasse modulo 2)
- Symmetrie
- Knotengrad, Summe der Knotengrade, ...
- Summe, Minimum, Maximum, Durchschnitt, Anzahl, ... einer Menge von Elementen
- Fläche, Umfang, Winkel, ... einer geometrischen Figur
- Auch recht kompliziert berechnete Größen, zB Summe der Quadrate von Zahlen, Anzahl vertauschter Paare in einer Permutation, ...
- ...

Monovarianten

Ähnlich zu einer Invariante können Größen sich manchmal monoton verhalten, also bei jedem Schritt immer kleiner (oder immer größer) werden. Ist die Größe schon zu Beginn zu klein, und wird sie bei jedem Schritt noch kleiner oder bleibt gleich, dann kann nie ein Zielzustand erreicht werden, in dem sie größer ist als zu Beginn.

Beispiel 2. Neun 1×1 -Zellen eines 10×10 -Schachbretts sind infiziert. In jedem Schritt wird eine Zelle ausgewählt, die mit mindestens zwei infizierten Zellen eine gemeinsame Kante hat, und wird infiziert. Können nach einigen Schritten alle 100 Zellen infiziert werden?

Lösung. Wir betrachten den Umfang des infizierten Gebiets (also die Anzahl der Kanten, die auf einer Seite ein infizierte Zelle und auf der anderen eine freie Zelle oder den Brettrand haben). Eine Zelle kann auf folgende Arten infiziert werden:

- Die Zelle grenzt über genau zwei Kanten an infizierte Zellen. Dann fallen vom Umfang diese zwei Kanten weg, und stattdessen kommen die beiden anderen Kanten der gewählten Zelle zum Umfang dazu, der Umfang bleibt daher gleich.
- Die Zelle grenzt über genau drei Kanten an infizierte Zellen. Dann fallen vom Umfang diese drei Kanten weg, und nur die vierte Kante der Zelle kommt dazu, der Umfang verringert sich um 2.
- Die Zelle grenzt über alle vier Kanten an infizierte Zellen. Dann fallen vom Umfang diese vier Kanten weg und keine neue kommt hinzu, daher verringert der Umfang sich um 4.

Zu Beginn beträgt der Umfang maximal $9 \cdot 4 = 36$. Da er in jedem Schritt nur kleiner werden oder gleich bleiben kann, wird er nie größer als 36 werden. Um das gesamte Brett zu füllen, bräuchten wir aber einen Umfang von $4 \cdot 10 = 40$. \square