1. Man zeige: In Wien gibt es zwei Personen mit genau gleich vielen Haaren am Kopf.
2. Man zeige: Wählt man 11 Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 2018\}$, so befinden sich darunter sicher zwei, deren Differenz durch 10 teilbar ist.
3. Man zeige: Wenn man beliebige 50 verschiedene positive ganze Zahlen erhält, ist es immer möglich, daraus vier verschiedene Zahlen a, b, c und d auszuwählen, sodass $(b-a)\cdot(d-c)$ ein Vielfaches von 2009 ist.
4. In einer Urne befinden sich ausreichend viele Kugeln in 7 verschiedenen Farben. Wie viele Kugeln muss man mindestens (blind) ziehen, um garantieren zu können, dass man daraus mindestens 7 einfarbige Gruppen mit je 7 Kugeln bilden kann? (Mehrere Gruppen dürfen dieselbe Farbe haben.)
5. Auf ein 8×8-Schachbrett werden 33 Türme gestellt. Man zeige, dass man 28 davon entfernen kann, sodass die restlichen fünf einander nicht bedrohen.
6. Auf einer Party begrüßen sich einige der Gäste mit Handschlag. Man zeige, dass es zu jedem Zeitpunkt zwei Gäste gibt, die genau gleich vielen verschiedenen Personen bereits die Hand gegeben haben.
7. Man bestimme die maximale Anzahl von Elementen in einer Teilmenge L von $\{1, 2, \ldots, 1999\}$ sodass die Differenz von keinen zwei Elementen aus L gleich 4 ist.
8. Im Inneren oder auf dem Rand eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 2 liegen 5 Punkte. Man zeige: Unter den 5 Punkten gibt es zwei, deren Abstand nicht größer als 1 ist.
9. Im Inneren oder am Rand eines 3×4-Rechtecks liegen a) 7, b) 6 Punkte. Man zeige, dass es unter diesen Punkten zwei gibt, deren Abstand nicht größer als $\sqrt{5}$ ist.
10. Im Inneren eines Quadrats mit Seitenlänge 1 liegen 9 Punkte so, dass keine 3 der 9 Punkte auf einer Geraden liegen. Man zeige, dass es unter den Dreiecken, deren Ecken drei der neun Punkte sind, a) mindestens eines, b) mindestens zwei gibt, deren Flächeninhalt kleiner als $\frac{1}{8}$ ist.
11. Man zeige: Jede Menge von n natürlichen Zahlen enthält eine nicht-leere Teilmenge, für die die Summe ihrer Elemente durch n teilbar ist.
12. Man zeige: In einer Menge von 1002 verschiedenen positiven ganzen Zahlen kleiner als 2002 gibt es immer drei verschiedene Zahlen derart, dass eine der drei Zahlen die Summe der beiden anderen ist.
13. Man zeige, dass es möglich ist, aus einer Menge von 10 verschiedenen zweistelligen Zahlen (im Dezimalsystem) zwei disjunkte Teilmengen auszuwählen, die dieselbe Summe haben.
14. Ein aus 6×2 Einheitsquadraten bestehendes Raster hat 21 Gitterpunkte. Ist es möglich, diese Gitterpunkte mit zwei Farben so zu färben, dass keine vier gleich gefärbten Gitterpunkte ein Rechteck bilden?
15. In einem regelmäßigen 6-Eck wird jede Ecke mit jeder anderen Ecke verbunden, und jede solche Verbindung wird entweder rot oder blau gefärbt. Man zeige, dass es unter den Verbindungen ein Dreieck aus drei roten Seiten oder ein Dreieck aus drei blauen Seiten gibt (oder beides).
16. Siebzehn Leute unterhalten sich miteinander per Post – jeder mit jedem. In ihren Briefen werden nur drei verschiedene Themen besprochen. Jedes Paar befasst sich mit genau einem dieser Themen. Man beweise, dass es mindestens drei Leute gibt, die einander über dasselbe Thema schreiben.
17. Ein Labyrinth besteht aus n Räumen, die mit Einbahnstraßen miteinander verbunden sind. Jeder Raum hat mindestens einen Ausgang. Man zeige, dass das Labyrinth mindestens einen Rundweg enthält (d.h. einen Weg, der bei einem bestimmten Raum beginnt und über endlich viele Einbahnstraßen wieder zu diesem Raum zurückführt).
18. Man zeige: Für jede Zahl n ist die Fibonacci-Folge periodisch modulo n.
19. Man zeige: Es existiert eine Fibonacci-Zahl, die mit vier Nullen endet.
20. Man zeige, dass es unter den 2017 Zahlen 1, 11, 111, …, $\underbrace{111\ldots111}_{2017}$ eine gibt, die durch 2017 teilbar ist.
21. Man beweise, dass jede Folge von $mn+1$ verschiedenen reellen Zahlen eine $m+1$-elementige streng monoton wachsende Teilfolge oder eine $n+1$-elementige streng monoton fallende Teilfolge enthält (oder beides).
22. Jeder Punkt am Rand eines gleichseitigen Dreiecks ist rot oder blau gefärbt. Gibt es unter diesen Punkten drei gleich gefärbte, die die Eckpunkte eines rechtwinkeligen Dreiecks sind?
23. Gibt es a) vier, b) fünf verschiedene positive ganze Zahlen derart, dass die Summe von je drei dieser Zahlen eine Primzahl ist?

1. 21 Streichhölzer liegen auf einem Stapel. Wer am Zug ist, nimmt 1 oder 2 Streichhölzer. Wer das letzte Streichholz nimmt, a) gewinnt, b) verliert. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

2. 1000 Münzen liegen auf einem Stapel. Zwei Personen spielen abwechselnd. Wer am Zug ist, darf 1, 3 oder 6 Münzen nehmen. Es gewinnt, wer die letzte Münze nimmt. Wer von beiden hat eine Gewinnstrategie?

3. Dan und Sam spielen ein Spiel, in dem sie abwechselnd ziehen. Dan sagt 1, Sam sagt 2. Ab dann muss jeder eine Zahl sagen, die echt größer als die zuvor genannte, und echt kleiner als das Doppelte davon ist. Wer 100 sagt, gewinnt. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

4. Alice und Bob spielen ein Spiel mit einer Schnur, auf der 2015 Perlen aufgereiht sind. Wer am Zug ist, zerschneidet die Schnur zwischen zwei Perlen. Der oder die andere entscheidet, welches der beiden Stücke für den Rest des Spieles verwendet wird. Das andere Stück wird entfernt.

   Alice beginnt, danach wechseln sich die beiden mit dem Zerschneiden ab. Verloren hat, wer am Zug ist und nur eine einzige Perle vor sich hat, sodass kein Schnitt zwischen zwei Perlen mehr möglich ist.

   Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

5. Zwei Personen spielen auf einem 5×5-Brett. Sie beginnen mit einem Stein in der unteren linken Ecke. Wer am Zug ist, darf den Stein entweder um 1 oder 2 Felder nach rechts schieben, oder ins linkeste Feld der nächsthöheren Reihe setzen. Wer den letzten Zug macht, gewinnt. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

6. „Zwei-Schritte-Schach“ wird nach denselben Regeln wie normales Schach gespielt, außer, dass man, wenn man an der Reihe ist, *zwei* Züge macht. Weiß beginnt. Man zeige, dass Weiß zumindest ein Unentschieden erzwingen kann.

7. („Chomp“ am Quadrat) Das linke untere Eck einer $n \times n$-Schokoladentafel ist vergiftet. Alice und Bob ziehen abwechselnd, Alice beginnt. Wer am Zug ist, wählt ein noch vorhandenes Stück Schokolade und beißt das gesamte Rechteck vom gewählten Stück bis zum rechten oberen Eck (der ursprünglichen Tafel) herunter. Wer das vergiftete Stück essen muss, verliert.

8. Alice und Bob setzen abwechselnd Dominosteine (also Steine der Form 1×2) senkrecht oder waagrecht so auf ein $2n \times 2n$ Schachbrett, dass jeder Dominostein genau zwei Felder überdeckt und keine zwei Dominosteine sich überlappen. Wer nicht mehr legen kann, verliert. Alice beginnt. Man zeige, dass Bob, wenn er optimal spielt, immer gewinnt.

9. Alice und Bob legen abwechselnd identische, kreisrunde Münzen so auf einen quadratischen Tisch, dass keine Münze über den Tischrand hinaussteht und keine zwei Münzen sich überlappen. Wer nicht mehr legen kann, verliert. Alice beginnt. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

10. („4×4 Misère Tic-Tac-Toe“) Nehmen wir an, Tic-Tac-Toe wird auf einem 4×4-Brett gespielt, und wer vier Felder in einer Linie (horizontal, vertikal oder diagonal) besetzt, *verliert*. Man zeige, dass die Person, die als zweites zieht, zumindest ein Unentschieden erzwingen kann.

11. Alice und Bob setzen eine Dame auf ein Schachbrett und ziehen abwechselnd mit dieser, Alice beginnt. In jedem Zug darf die Dame beliebig weit waagrecht, senkrecht oder diagonal bewegt werden, darf jedoch auf keinem schon einmal benutzen Feld ein zweites Mal stehen bleiben. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

12. Alice und Bob spielen ein Spiel auf einer 6×6-Tabelle. Wer an der Reihe ist, wählt eine rationale Zahl, die in der Tabelle noch nicht vorkommt, und schreibt sie in ein leeres Feld der Tabelle.

    Alice beginnt, danach ziehen sie abwechselnd.

    Wenn in alle Felder Zahlen stehen, wird in jeder Zeile das Feld mit der größten Zahl schwarz ausgemalt.

    Alice gewinnt, wenn sie eine (durchgehende, aber nicht notwendigerweise gerade) Linie vom oberen zum unteren Ende der Tabelle zeichnen kann, die vollständig innerhalb von schwarzen Feldern verläuft, und Bob gewinnt, wenn sie das nicht kann. (Wenn zwei Felder eine gemeinsame Ecke haben, kann Alice eine Linie vom einen ins andere Feld zeichnen, die innerhalb dieser Felder verläuft.)

    Man finde (mit Beweis) eine Gewinnstrategie für eine der beiden Personen.

Aufgaben

Anmerkung: In allen Aufgaben steht n für eine beliebige natürliche Zahl, und Schulklassen, Gruppen von Rittern, ... werden als endliche Mengen angenommen.

1. Man zeige: Jedes konvexe Polyeder (mit endlich vielen Seiten) hat zwei Seitenflächen mit derselben Anzahl von Kanten.
2. In einer Schulklasse gelte folgende Eigenschaft: Je zwei Personen mit der gleichen Anzahl von Freunden in der Klasse haben keinen gemeinsamen Freund in der Klasse. (Freundschaften sind immer gegenseitig, und es gibt in der Klasse mindestens eine Freundschaft.) Man zeige: Es gibt eine Person mit genau einem Freund.
3. Die Ritter der Tafelrunde sitzen um einen runden Tisch. Jeder hat einige ausgetrunkene Gläser Bier vor sich stehen, wobei jeder genau so viel getrunken hat wie der Durchschnitt seiner beiden Sitznachbarn. Man zeige: Alle Ritter haben gleich viel getrunken.
4. Jeder Gitterpunkt der Ebene wird mit einer positiven ganzen Zahl beschriftet, und zwar so, dass jede dieser Zahlen das arithmetische Mittel der vier Nachbarzahlen ist. Man zeige, dass alle Zahlen gleich sind. (Gitterpunkte sind alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.)
5. In der Ebene liegen $2n+2$ Punkte, sodass keine drei auf einer Geraden liegen. Man zeige, dass man eine Gerade durch zwei dieser Punkte legen kann, die die anderen $2n$ Punkte in zwei Gruppen mit je n Punkten teilt.
6. Von $2n+3$ Punkten in der Ebene seien keine drei kollinear und keine vier liegen auf einem Kreis. Man zeige, dass es einen Kreis durch drei dieser Punkte gibt, in dessen Inneren genau n der übrigen Punkte liegen.
7. Sei M eine Menge von Punkten in der Ebene. Für je zwei Punkte in M liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke dieser Punkte wieder in M. Man zeige, dass M unendlich viele Punkte enthält.
8. Es seien n Punkte in der Ebene gegeben. Je drei von ihnen bilden ein Dreieck, dessen Fläche kleiner oder gleich 1 ist. Man beweise: Es gibt ein Dreieck mit der Fläche 4, das alle n Punkte enthält.
9. In der Ebene seien n verschiedene Punkte $H_1, \ldots, H_n$ (Häuser), sowie n andere Punkte $B_1, \ldots, B_n$ (Brunnen) gegeben. Keine drei von diesen $2n$ Punkten sind kollinear. Man zeige, dass man jedes Haus mit jeweils einem Brunnen so durch eine gerade Strecke verbinden kann, dass sich diese Strecken nicht schneiden.
10. In der einklassigen Raacher Volksschule hat jedes Kind höchstens drei Feinde. Man beweise, dass man die Kinder der Schule so in zwei Klassen einteilen kann, dass jedes Kind in seiner Klasse höchstens einen Feind hat.
11. Eine Klasse hat eine ungerade Anzahl von Kindern, und diese machen eine Schneeballschlacht. Jedes Kind stellt sich irgendwo am (konvexen, baumfreien) Schulhof auf, wobei keine zwei Abstände zwischen Kindern genau gleich sind. Dann formt jedes Kind genau einen Schneeball und schießt damit auf das Kind, das ihm am nächsten ist (und trifft). Man zeige: Es gibt ein Kind, das von keinem Schneeball getroffen wird.
12. Man zeige: Bei der Schneeballschlacht aus der vorigen Aufgabe wird kein Kind von mehr als 5 Schneebällen getroffen.
13. Man zeige: Es gibt keine positiven natürlichen Zahlen a, b, c und d mit $a^2+b^2 = 3\cdot(c^2+d^2)$.
14. Man bestimme alle positiven reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems:
$$a+b=c^2 \qquad b+c=d^2 \qquad c+d=e^2 \qquad d+e=a^2 \qquad e+a=b^2$$
15. Man zeige: In jedem konvexen n-Eck ($n \geq 3$) gibt es drei aufeinanderfolgende Eckpunkte, deren Umkreis das gesamte n-Eck überdeckt.

1. Auf einer Insel leben 13 blaue, 15 weiße und 17 rote Chamäleons. Wenn sich zwei verschieden farbige treffen, ändern sie ihre Farbe in die dritte. Können alle dieselbe Farbe bekommen?
2. Die bösen Buben Max und Moritz zerreißen gemeinsam die Zeichnung ihrer großen Schwester Mathilde. Max macht aus einem Stück Papier stets drei Teile, Moritz fünf. Als Mathilde dazu kommt, sind es bereits 100 Teile. Sie verlangt, dass ihre Brüder die schöne Zeichnung wieder zusammensetzen. Kann das gelingen?
3. In der Zahl 7^{2018} wird wiederholt die erste Ziffer gestrichen und zur restlichen Zahl hinzu addiert, bis nur noch eine zehnstellige Zahl übrig bleibt. Zeige: In dieser Zahl kommt eine Ziffer doppelt vor.
4. An den Rand eines Kreises werden 2018 Ziffern geschrieben, und zwar 1009 Einser und 1009 Nullen in beliebiger Reihenfolge. Ein Zug besteht darin, dass zwei benachbarte Ziffern ausgewählt werden. Zwischen diese beiden wird ein Einser geschrieben, wenn die beiden Ziffern verschieden sind und sonst eine Null. Dann werden die ursprünglichen Ziffern gelöscht. Man beweise, dass es für keine ursprüngliche Anordnung und keine Zugreihenfolge möglich ist, dass am Ende eine einzelne Null stehen bleibt.
5. Auf dem Umfang eines Kreises sind n Punkte markiert. Auf jedem Punkt liegt ein Stein. In einem Zug werden zwei beliebige Steine in entgegengesetzte Richtung um einen Punkt verschoben. Am Ende sollen alle Steine auf einem Punkt liegen. Ist das möglich?
6. Wir erfinden eine neue Schachfigur, den Esel. In einem Zug wechselt der Esel zunächst zu einem Nachbarfeld und bewegt sich dann normal zum ersten Schritt um drei Felder weiter. Er darf zum Beispiel vom Feld A1 auf das Feld B4 gehen. Am Anfang steht der Esel auf dem Feld A1. Kann er nun (in einem oder mehreren Zügen) das Feld A8 erreichen?
7. Katze und Maus bewegen sich auf den Gitterpunkten eines 2018×2018-Schachbretts und war so, dass sie abwechselnd einen Schritt von einem Gitterpunkt zum nächsten machen. Die Katze beginnt und sie kann die Maus fangen, wenn sie mit ihrem Zug den Gitterpunkt erreicht, auf dem die Maus gerade steht. Kann die Katze die Maus fangen?
8. Ein rechteckiges Bodenstück ist mit rechteckigen Platten der Form 1×4 und 2×2 ausgelegt. Eines Tages wird eine Platte versehentlich zerschlagen, aber man hat noch eine Platte der anderen Form übrig. Kann man die Platten neu anordnen und den Boden damit wieder vollständig auslegen?
9. Auf ein Quadrat eines 4×4-Schachbretts schreiben wir -1, auf die anderen 15 Quadrate jeweils $+1$. In jedem Zug darf man alle Vorzeichen in einer Zeile, einer Spalte oder einer Diagonale ändern. Man zeige, dass nie alle Zahlen gleich $+1$ sein können.
10. Starte mit den Zahlen 3, 4 und 12. In jedem Zug darf man zwei Zahlen a und b auswählen und durch $0.6a - 0.8b$ und $0.8a + 0.6b$ ersetzen. Kann man nach endlich vielen Zügen die Zahlen 4, 6 und 12 erreichen?
11. Auf einer Kette sind 2016 Perlen im Kreis angeordnet, von denen jede eine der Farben schwarz, blau oder grün hat. In jedem Schritt wird gleichzeitig jede Perle durch eine neue Perle ersetzt, wobei sich die Farbe der neuen Perle wie folgt bestimmt: Falls die beiden ursprünglichen Nachbarn dieselbe Farbe hatten, hat die neue Perle deren Farbe. Falls die Nachbarn zwei verschiedene Farben hatten, hat die neue Perle die dritte Farbe.
    (a) Gibt es eine solche Kette, auf der die Hälfte der Perlen schwarz und die andere Hälfte grün ist, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?
    (b) Gibt es eine solche Kette, auf der tausend Perlen schwarz und die übrigen grün sind, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?
    (c) Ist es möglich, von einer Kette, die genau zwei benachbarte schwarze und sonst nur blaue Perlen enthält, mit solchen Schritten zu einer Kette zu kommen, die genau eine grüne und sonst nur blaue Perlen enthält?
12. Die 97 Zahlen $\frac{49}{1}, \frac{49}{2}, \frac{49}{3}, \ldots, \frac{49}{97}$ stehen an einer Tafel. Wir wählen immer wieder zwei Zahlen a und b aus und ersetzen sie durch $2ab - a - b + 1$. Das tun wir solange, bis nur mehr eine Zahl an der Tafel steht. Welche möglichen Werte kann diese letzte Zahl haben?
13. In die Felder einer $n \times m$-Tabelle werden zufällig die Werte -1 und 1 eingetragen. Anschließend darf man beliebig oft in einer ausgewählten Zeile oder Spalte alle Vorzeichen umdrehen. Zeige, dass es möglich ist, durch eine Folge solcher Schritte zu erreichen, dass alle Zeilen- und Spaltensummen in der Tabelle nichtnegative ganze Zahlen sind!
14. Zwölf Botschafter sind zu einem Bankett eingeladen. Jeder Botschafter hat unter den elf anderen Botschaftern höchstens fünf Feinde. Man zeige, dass man die Botschafter so an einen runden Tisch setzen kann, dass keiner neben einem seiner Feinde sitzt.