



53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb

14. Juni 2022

1. Man zeige, dass für alle reellen Zahlen x und y mit $x > -1$ und $y > -1$ sowie $x + y = 1$ die Ungleichung

$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq \frac{2}{3}$$

gilt. Wann gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

2. Gegeben sind ein rechteckiges Spielfeld der Größe 13×2 und beliebig viele Dominosteine der Größen 2×1 und 3×1 . Das Spielfeld soll mit solchen Dominosteinen lückenlos und ohne Überlappung überdeckt werden, wobei kein Dominostein über das Spielfeld hinausragen darf. Weiters müssen alle Dominosteine gleich ausgerichtet sein, d. h. ihre langen Seiten müssen parallel zueinander liegen.

Wie viele derartige Überdeckungen sind möglich?

(Walther Janous)

3. Über der Strecke AB mit Mittelpunkt M wird ein Halbkreis errichtet. Sei P ein von A und B verschiedener Punkt auf dem Halbkreis und Q der Halbierungspunkt des Kreisbogens AP . Der Schnittpunkt der Geraden BP mit der Parallelen zu PQ durch M sei S .

Man zeige, dass $PM = PS$ gilt.

(Karl Czakler)

4. Man bestimme alle Primzahlen p, q und r mit $p + q^2 = r^4$.

(Karl Czakler)

Arbeitszeit: 4 Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.