



54. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene

30. März 2023

1. Es seien a, b und c reelle Zahlen mit $0 \leq a, b, c \leq 2$. Man beweise, dass

$$(a - b)(b - c)(a - c) \leq 2$$

gilt, und man gebe an, wann Gleichheit eintritt.

(Karl Czakler)

2. Sei $ABCD$ eine Raute mit $\sphericalangle BAD < 90^\circ$. Der Kreis durch D mit Mittelpunkt A schneide die Gerade CD ein zweites Mal im Punkt E . Der Schnittpunkt der Geraden BE und AC sei S .

Man beweise, dass die Punkte A, S, D und E auf einem Kreis liegen.

(Karl Czakler)

3. Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die es zwei Anordnungen (a_1, a_2, \dots, a_n) und (b_1, b_2, \dots, b_n) der Zahlen $1, 2, \dots, n$ gibt, sodass $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ aufeinander folgende natürliche Zahlen sind.

(Walther Janous)

4. Man bestimme alle Paare (x, y) von positiven ganzen Zahlen, sodass für $d = \text{ggT}(x, y)$ die Gleichung

$$xyd = x + y + d^2$$

gilt.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.