



## 54. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene

30. März 2023

---

1. Es seien  $a, b$  und  $c$  reelle Zahlen mit  $0 \leq a, b, c \leq 2$ . Man beweise, dass

$$(a - b)(b - c)(a - c) \leq 2$$

gilt, und man gebe an, wann Gleichheit eintritt.

*(Karl Czakler)*

2. Sei  $ABCD$  eine Raute mit  $\sphericalangle BAD < 90^\circ$ . Der Kreis durch  $D$  mit Mittelpunkt  $A$  schneide die Gerade  $CD$  ein zweites Mal im Punkt  $E$ . Der Schnittpunkt der Geraden  $BE$  und  $AC$  sei  $S$ .

Man beweise, dass die Punkte  $A, S, D$  und  $E$  auf einem Kreis liegen.

*(Karl Czakler)*

3. Man bestimme alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$ , für die es zwei Anordnungen  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  und  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  gibt, sodass  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$  aufeinander folgende natürliche Zahlen sind.

*(Walther Janous)*

4. Man bestimme alle Paare  $(x, y)$  von positiven ganzen Zahlen, sodass für  $d = \text{ggT}(x, y)$  die Gleichung

$$xyd = x + y + d^2$$

gilt.

*(Walther Janous)*

Arbeitszeit: 4 Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.