49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

12. Juni 2018

1. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$$

   Wann gilt Gleichheit?

   (Walther Janous)

2. Es seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck, M der Mittelpunkt der Seite AC und F auf AB der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C.

   Man beweise, dass $\overline{AM} = \overline{AF}$ genau dann gilt, wenn $\sphericalangle BAC = 60°$.

   (Karl Czakler)

3. Zu einer gegebenen ganzen Zahl $n \geq 4$ untersuchen wir, ob es eine Tabelle mit drei Zeilen und n Spalten gibt, die mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 3n$ gefüllt werden kann, sodass

   - sich in jeder Zeile die selbe Summe z ergibt und
   - sich in jeder Spalte die selbe Summe s ergibt.

   Man zeige:

   (a) Wenn n gerade ist, gibt es keine solche Tabelle.

   (b) Für $n = 5$ gibt es eine solche Tabelle.

   (Gerhard J. Woeginger)

4. Für eine beliebige natürliche Zahl n bezeichnen wir die Anzahl der positiven Teiler von n mit $d(n)$ und die Summe dieser Teiler mit $s(n)$. Zum Beispiel ist $d(2018)$ gleich 4, weil 2018 vier Teiler hat (1, 2, 1009 und 2018) und $s(2018) = 1 + 2 + 1009 + 2018 = 3030$.

   Man bestimme alle natürlichen Zahlen x, für die $s(x) \cdot d(x) = 96$ gilt.

   (Richard Henner)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.