49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Teil 1 – Lösungen

28. April 2018

Aufgabe 1. *Es sei α eine positive reelle Zahl. Man bestimme für dieses α die größte reelle Zahl C derart, dass für alle positiven reellen Zahlen x, y und z mit $xy + yz + zx = \alpha$ die Ungleichung*

$$\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{y^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{z^2}\right) \geq C\cdot\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2\right)$$

gilt. Wann gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

Lösung 1. Wir setzen für α die Nebenbedingung ein, multiplizieren beide Seiten mit dem gemeinsamen Nenner $x^2y^2z^2 > 0$ und erhalten die äquivalente Ungleichung

$$(x^2+xy+xz+yz)(y^2+yx+yz+xz)(z^2+zx+zy+xy) \geq Cxy^2z(x^2+z^2+2xz).$$

Die Ungleichung ist nun homogen vom Grad 6, die Nebenbedingung also nicht mehr relevant. Jeder der Faktoren lässt sich faktorisieren:

$$(x+y)(x+z)(y+x)(y+z)(z+x)(z+y) \geq Cxy^2z(x+z)^2.$$

Wir kürzen $(x+z)^2 > 0$ und erhalten die äquivalente Ungleichung

$$(x+y)^2(z+y)^2 \geq Cxy^2z.$$

Schätzt man jeden der beiden Faktoren links mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung ab, so erhält man einen optimalen Wert von $C = 16$, welcher für $x = y = z = \sqrt{\alpha/3}$ angenommen wird.

(Clemens Heuberger) $\square$

Lösung 2. Wir ersetzen im ersten Schritt x, y und z durch $X\cdot\sqrt{\alpha}$, $Y\cdot\sqrt{\alpha}$ bzw. $Z\cdot\sqrt{\alpha}$, wobei X, Y und Z positive reelle Zahlen mit $XY + YZ + ZX = 1$ sind. Unsere Ungleichung lautet damit

$$\left(1+\frac{1}{X^2}\right)\left(1+\frac{1}{Y^2}\right)\left(1+\frac{1}{Z^2}\right) \geq C\cdot\left(\frac{X}{Z}+\frac{Z}{X}+2\right).$$

Aus der Nebenbedingung ergibt sich $Y = \frac{1-XZ}{X+Z}$ (samt $XZ < 1$) und damit

$$\left(1+\frac{1}{X^2}\right)\left(1+\frac{(X+Z)^2}{(1-XZ)^2}\right)\left(1+\frac{1}{Z^2}\right) \geq C\cdot\left(\frac{X}{Z}+\frac{Z}{X}+2\right).$$

Wegen

$$1+\frac{(X+Z)^2}{(1-XZ)^2} = \frac{X^2Z^2+X^2+Z^2+1}{(1-XZ)^2} = \frac{(X^2+1)(Z^2+1)}{(1-XZ)^2}$$

erhalten wir die äquivalente Ungleichung

$$\frac{X^2+1}{X^2}\cdot\frac{(X^2+1)(Z^2+1)}{(1-XZ)^2}\cdot\frac{Z^2+1}{Z^2} \geq C\cdot\frac{(X+Z)^2}{XZ},$$

d.h.

$$\frac{(X^2+1)^2(Z^2+1)^2}{X^2Z^2(1-XZ)^2} \geq C\cdot\frac{(X+Z)^2}{XZ}.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $\frac{(1-XZ)^2X^2Z^2}{(X+Z)^2} > 0$ und erhalten die äquivalente Ungleichung

$$\frac{(X^2+1)^2(Z^2+1)^2}{(X+Z)^2} \geq C \cdot XZ(1-XZ)^2.$$

Deshalb müssen wir die größte Zahl C bestimmen, für die diese Ungleichung erfüllt ist.

Experimente mit einigen Zahlenpaaren (X, Z) führen zur Vermutung, dass $C = 16$ die gesuchte größtmögliche Zahl ist. Um dies zu beweisen setzen wir $XZ = p^2$ mit $0 < p < 1$. Da alle Terme positiv sind, können wir auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und haben damit die äquivalente Ungleichung

$$\frac{(X^2+1)(Z^2+1)}{X+Z} \geq 4 \cdot p(1-p^2)$$

nachzuweisen, d.h. aber

$$\frac{X^2Z^2+X^2+Z^2+1}{X+Z} \geq 4 \cdot p(1-p^2),$$

also

$$\frac{p^4+(X+Z)^2-2XZ+1}{X+Z} \geq 4 \cdot p(1-p^2),$$

was sich mit $s := X+Z$ in der Form

$$s + \frac{(1-p^2)^2}{s} \geq 4 \cdot p(1-p^2)$$

oder äquivalent

$$s^2 - 4sp(1-p^2) + (1-p^2)^2 \geq 0$$

darstellen lässt.

Wir wissen, dass $s \geq 2p$. Wir nennen die Differenz $D = s - 2p$. Da es sich um ein quadratisches Polynom in s handelt, handelt es sich auch um ein quadratisches Polynom D. Wir schreiben dieses an und erhalten

$$\begin{aligned} s^2 - 4sp(1-p^2) + (1-p^2)^2 &= (s-2p)^2 + 4p^3(s-2p) + (3p^2-1)^2 \\ &= D^2 + 4p^3D + (3p^2-1)^2. \end{aligned}$$

Wegen $D = s-2p \geq 0$ ist das immer größer oder gleich 0 mit Gleichheit genau für $s = 2p$ und $p = 1/\sqrt{3}$. Daraus folgt $X = Z = 1/\sqrt{3}$ und damit auch $Y = 1/\sqrt{3}$. Für die Ausgangsungleichung tritt deshalb genau für $x = y = z = \sqrt{\alpha/3}$ Gleichheit auf.

(Clemens Heuberger, Walther Janous) □

Lösung 2a. Wie in Lösung 2 sollen wir zeigen, dass

$$s + \frac{(1-p^2)^2}{s} \geq 4p(1-p^2)$$

gilt.

Wir bemerken, dass wegen der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung $X + Z \geq 2\sqrt{XZ}$, d.h. $s \geq 2p$, mit Gleichheit für $X = Z$ gilt.

Außerdem ergibt sich mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung: Für die Funktion $f(s) := s + \frac{(1-p^2)^2}{s}$ gilt $f(s) \geq 2\sqrt{s \cdot \frac{(1-p^2)^2}{s}} = 2(1-p^2)$ mit Gleichheit für $s = 1-p^2$. Zudem ist $f(s)$ für $s \in [1-p^2, \infty)$ streng monoton steigend, da für $c = 1-p^2$ die Gleichung

$$f(s) - f(t) = s + \frac{c^2}{s} - t - \frac{c^2}{t} = \frac{1}{st}(s-t)(st-c^2)$$

gilt.

Wegen

$$2(1-p^2) > 4p(1-p^2) \iff p < 1/2$$

ist $f(s) > 4p(1-p^2)$ für $0 < p < 1/2$ erfüllt.

Für $p = 1/2$ gilt zwar $f(s) \geq 4p(1-p^2)$, aber der Gleichheitsfall kann wegen $1-p^2 < 2p$ nicht eintreten.

Es sei deshalb im Weiteren $1/2 < p < 1$. Dann ist $2p > 1-p^2$ erfüllt. Damit ergibt sich aber $f(s) \geq f(2p)$, d.h. $f(s) \geq \frac{(p^2+1)^2}{2p}$. Wegen

$$\frac{(p^2+1)^2}{2p} \geq 4p(1-p^2) \iff 9p^4 - 6p^2 + 1 \geq 0 \iff (3p^2-1)^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau für $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$ haben wir die Ungleichung $f(s) \geq 4p(1-p^2)$ nachgewiesen.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und $s = 2p$, also $X = Z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und damit auch $Y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, gelten. Für die Ausgangsungleichung tritt deshalb genau für $x = y = z = \sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ Gleichheit auf.

(Walther Janous) □

Lösung 2b. Wie in den vorigen Lösungen ist

$$\frac{(X^2+1)^2(Z^2+1)^2}{(X+Z)^2} \geq 16XZ(1-XZ)^2$$

für alle X, $Z > 0$ mit $XZ < 1$ zu zeigen. Aus der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung in zwei Variablen folgt $X^2+1 = \frac{2}{3}+\left(X^2+\frac{1}{3}\right) \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}(X^2+\frac{1}{3})} = \sqrt{\frac{8}{3}\cdot(X^2+\frac{1}{3})}$ und analog dieselbe Ungleichung mit Z statt X. Damit erhalten wir unter Verwendung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$(X^2+1)^2(Z^2+1)^2 \geq \frac{64}{9}\cdot\left(X^2+\frac{1}{3}\right)\left(Z^2+\frac{1}{3}\right) \geq \frac{64}{9}\left(X\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}Z\right)^2 = \frac{64}{27}(X+Z)^2.$$

Andererseits folgt aus der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung in drei Variablen:

$$\frac{2}{3} = \frac{2XZ+(1-XZ)+(1-XZ)}{3} \geq \sqrt[3]{2XZ(1-XZ)^2}.$$

Insgesamt gilt also wie gewünscht

$$\frac{(X^2+1)^2(Z^2+1)^2}{(X+Z)^2} \geq \frac{64}{27} = 8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 \geq 16XZ(1-XZ)^2.$$

(Gerhard Kirchner) □

Aufgabe 2. *Es sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten BC und AC seien D bzw. E. Der Schnittpunkt der Geraden AI und DE sei P. Die Mittelpunkte der Seiten BC und AB seien M bzw. N.*

Man beweise, dass die Punkte M, N und P auf einer Geraden liegen.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Für den Fall $AB = AC$ gilt, dass wegen $D = M = P$ die Punkte M, N und P natürlich auf einer Geraden liegen. Wir betrachten nun den Fall $AB > AC$.

Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks in A, B und C wie üblich mit α, β bzw. γ. Es gilt sicher

$$\measuredangle BDP = \measuredangle CDE = 90° - \frac{\gamma}{2} \qquad \text{und} \qquad \measuredangle BIP = \frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2},$$

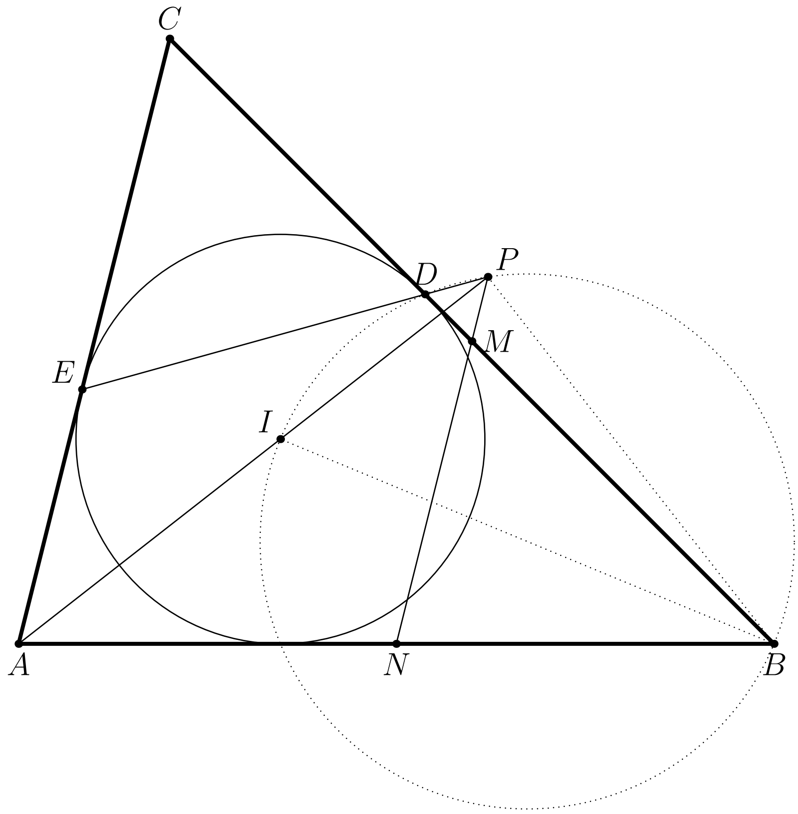

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

woraus folgt, dass $BPDI$ ein Sehnenviereck ist, vgl. Abbildung 1. Es gilt somit $\sphericalangle IPB = \sphericalangle IDB = 90°$, und das Dreieck APB ist daher rechtwinkelig. Da N der Mittelpunkt der Hypotenuse ist, ist dies sein Umkreismittelpunkt, und es gilt somit $\sphericalangle BNP = 2 \cdot \sphericalangle BAP = \alpha$. Wir sehen, dass PN parallel zu AC liegt, und da MN ebenfalls wegen der zentrischen Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und NBM (mit Zentrum in B und Faktor $\frac{1}{2}$) parallel zu AC liegt, liegen die Punkte M, N and P wie behauptet auf einer gemeinsamen Geraden.

Der Fall $AB < AC$ verläuft analog.

(Karl Czakler) □

Lösung 1a. Wir möchten zeigen, dass sich drei Geraden in einem Punkt schneiden. Dazu definieren wir zwei Punkte als Schnittpunkte von jeweils zwei der Geraden und zeigen, dass diese beiden Schnittpunkte zusammenfallen.

Es liegt nahe, als eines der Geradenpaare die Geraden DE und AI zu verwenden, da beide mit Hilfe von I definiert werden, das ergibt den Punkt P der Angabe. Da die Gerade DE die komplizierteste der drei Geraden ist, liegt es nahe, als zweites Geradenpaar die Geraden AI und NM zu wählen und deren Schnittpunkt, den wir mit P' bezeichnen, als erstes zu untersuchen, vgl. Abbildung 2, Bild 1.

In diesem Dreieck $AP'N$ kennen wir aber die Winkel: Der Winkel bei A ist $\alpha/2$, weil es sich um die Winkelsymmetrale handelt, der Winkel bei P' ist aber ebenfalls $\alpha/2$, weil es sich um einen Parallelwinkel zu $\sphericalangle CAI$ handelt, da die Verbindung zweier Seitenmittelpunkte bekanntlich parallel zur dritten Seite ist. Damit stellen wir fest, dass das Dreieck gleichschenkelig ist und $AN = NP' = NB$ gilt. Der Punkt P' liegt also auf dem Thaleskreis über AB und es gilt $\sphericalangle AP'B = 90°$.

Das ist eine gute Charakterisierung von P' und es bleibt uns also jetzt nur noch zu zeigen, dass auch P der Fußpunkt von B auf der Geraden AI ist. In der Zeichnung ohne die Gerade NM (siehe Abbildung 2, Bild 2) fallen uns sofort die vielen rechten Winkel (inklusive des mutmaßlichen bei P) auf, die Sehnenvierecke bilden. Wir wollen also nur noch zeigen, dass $IBPD$ ein Sehnenviereck ist. Wir kennen aber mit gerichteten Winkeln zwischen Geraden (d.h. der Winkel, der notwendig ist, um die

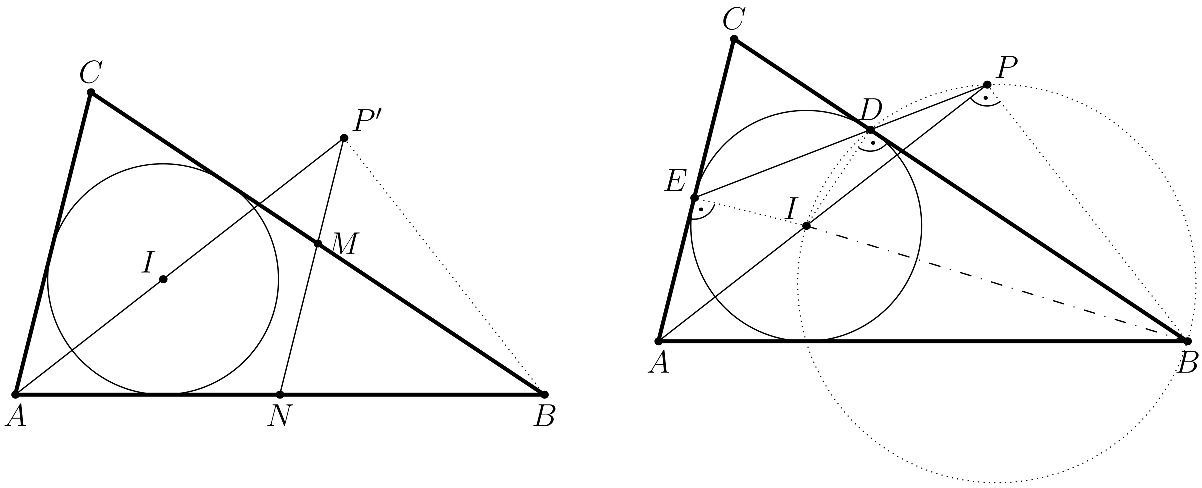

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 1a

erste Gerade gegen den Uhrzeigersinn in die zweite zu drehen)

$$\sphericalangle(DB, DP) = \sphericalangle(DC, DE) = 90^\circ - \gamma/2$$

und

$$\sphericalangle(IB, IP) = \sphericalangle(IB, IA) = \sphericalangle(IB, AB) + \sphericalangle(AB, IA) = \beta/2 + \alpha/2 = 90^\circ - \gamma/2.$$

Damit ist $IBPD$ ein Sehnenviereck und alles bewiesen.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Alle Punkte der Angabe haben einfache baryzentrische Koordinaten bezüglich A, B, C:

Es gilt $A = (1, 0, 0)$, $I \sim (a, b, c)$, $D \sim (0, z, y)$, $E \sim (z, 0, x)$, wobei $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$ mit $s = (a + b + c)/2$.

Für $P = (p, q, r)$ gelten daher

$$\begin{aligned} r &= \frac{x}{z}p + \frac{y}{z}q, \\ q &= \frac{b}{c}r, \\ p + q + r &= 1. \end{aligned}$$

Es gilt also nach Gleichung 2, dass

$$r = \frac{c}{b}q.$$

Somit gilt nach Gleichung 1, dass

$$p = \frac{z}{x}\left(r - \frac{y}{z}q\right) = \left(\frac{z}{x}\frac{c}{b} - \frac{y}{x}\right) q.$$

Gleichung 3 multipliziert mit dem gemeinsamen Nenner bx wird somit zu

$$bx = bx(p + q + r) = q(zc - by + bx + cx) = q(cb - by + bx) = q(bx + bx).$$

Also erhält man $q = \frac{1}{2}$, was bedeutet, dass P wie gewünscht auf der Verbindungsgeraden der beiden Seitenmittelpunkte liegt.

(Theresia Eisenkölbl) □

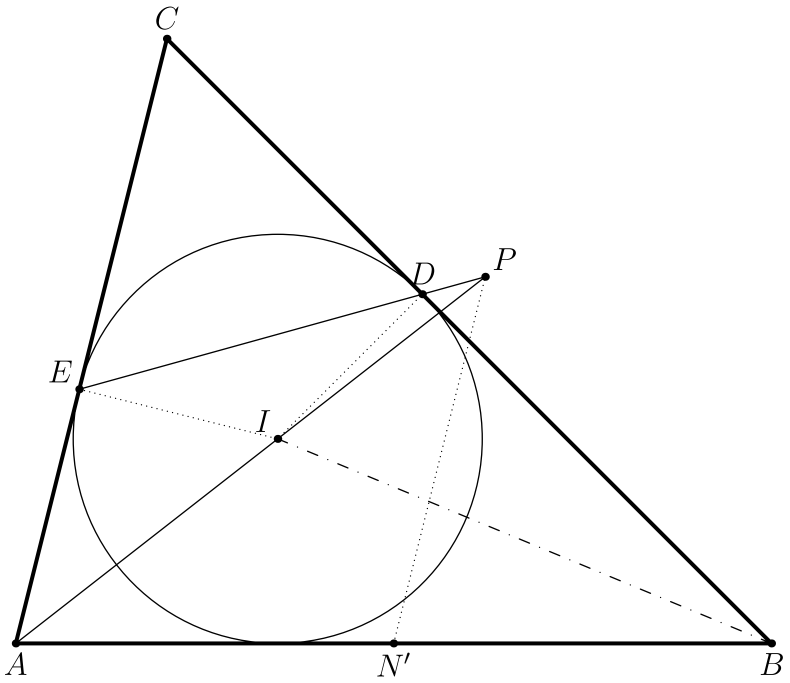

Abbildung 3: Aufgabe 2, Lösung 3

Lösung 3. Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks in A, B und C wie üblich mit α, β bzw. γ und die Dreiecksseite AB mit c. Sei N' der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch P mit der Seite AB, vgl. Abbildung 3.

Wegen der rechten Winkel $\sphericalangle IEC = \sphericalangle CDI = 90°$ ist $CEID$ ein Sehnenviereck. Daher gilt $\sphericalangle DEI = \sphericalangle DCI = \gamma/2$. Somit gilt auch $\sphericalangle PEI = \sphericalangle DEI = \gamma/2$. Wegen des rechten Winkels $\sphericalangle AEI = 90°$, $\sphericalangle IAE = \alpha/2$ und der Winkelsumme im Dreieck AEP folgt, dass $\sphericalangle EPA = \beta/2$. Daher sind wegen $\sphericalangle PAE = \sphericalangle BAI = \alpha/2$ und $\sphericalangle EPA = \sphericalangle IBA = \beta/2$ die Dreiecke AEP und AIB ähnlich und es folgt

$$AP : c = AE : AI.$$

Aus dem rechtwinkeligen Dreieck AEI erhalten wir $AE : AI = \cos(\alpha/2)$. Da $\sphericalangle PN'B = \alpha$ und $\sphericalangle N'AP = \alpha/2$, muss auch $\sphericalangle APN' = \alpha/2$ gelten. Der Sinussatz im Dreieck $AN'P$ ergibt

$$AP : AN' = \sin\alpha : \sin(\alpha/2).$$

Aus $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$ ergibt sich daraus

$$AP : AN' = 2\cos(\alpha/2) = 2AP : c$$

und damit $AN' = c/2$. Daher gilt $N' = N$. Da M auf der Parallelen zu AC durch N liegt, sind N, P und M kollinear.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 3a. Wir bezeichnen den Berührpunkt des Inkreises mit der Seite AB mit F, vgl. Abbildung 4.

Wie in Lösung 3 sehen wir, dass die Dreiecke AEP und AIB ähnlich sind und daraus

$$AP : c = AE : AI \tag{1}$$

folgt.

Wir definieren N' wie in Lösung 3 als Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch P mit der Dreiecksseite AB. Die Winkel $\sphericalangle PAC$ und $\sphericalangle APN'$ sind Parallelwinkel und damit gilt $\sphericalangle APN' = \sphericalangle PAC =$

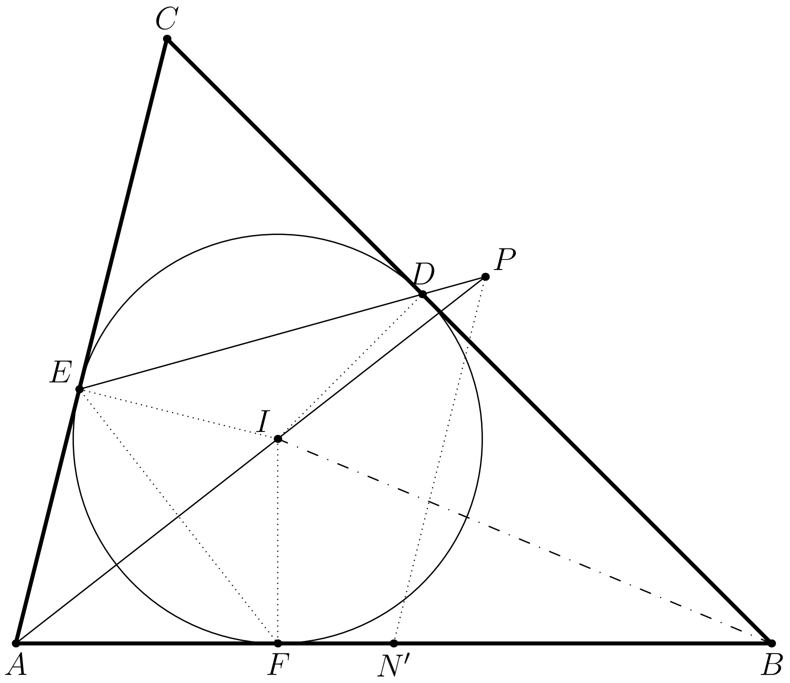

Abbildung 4: Aufgabe 2, Lösung 3a

$\alpha/2 = \sphericalangle N'AP$. Daher ist das Dreieck $AN'P$ ähnlich zum Dreieck FIE (es gilt $\sphericalangle FEI = \alpha/2 = \sphericalangle IFE$ wegen des Sehnenvierecks $AFIE$). Daher gilt

$$AN' : AP = EI : EF. \tag{2}$$

Schließlich gilt im Sehnenviereck $AFIE$

$$AI \cdot EF = 2 \cdot EI \cdot AE; \tag{3}$$

dieser Spezialfall des Satzes von Ptolemäus ist wegen der rechten Winkel $\sphericalangle AEI$ und $\sphericalangle IFA$ auch direkt über die Fläche des Sehnenvierecks sichtbar.

Aus (1) und (3) erhalten wir explizite Ausdrücke für AP bzw. EF und können mit deren Hilfe aus (2) AN' bestimmen:

$$AN' = AP \cdot EI \cdot \frac{1}{EF} = \frac{c \cdot AE}{AI} \cdot EI \cdot \frac{AI}{2 \cdot EI \cdot AE} = \frac{c}{2}.$$

Somit gilt $N' = N$. Da M auf der Parallelen zu AC durch N liegt, sind N, P und M kollinear.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 4. Wie in Lösung 3 sehen wir, dass die Dreiecke AEP und AIB ähnlich sind. Die entsprechende Drehstreckung mit Zentrum A führt also E in I und P in B über. Deswegen existiert eine zweite Drehstreckung mit Zentrum A, welche das Dreieck AEI auf das Dreieck APB abbildet. Insbesondere sind die Dreiecke AEI und APB zueinander ähnlich und somit die Winkel $\sphericalangle AEI = \sphericalangle APB$ gleich groß. Wegen $\sphericalangle AEI = 90°$ gilt also $\sphericalangle APB = 90°$. Weiter wie in Lösung 1.

(Josef Greilhuber, Stefan Leopoldseder) □

Lösung 5. Für $AB = AC$ gilt $D = M = P$, sodass M, N und P natürlich auf einer Geraden liegen. Wir nehmen daher an, dass $AB \neq AC$ gilt.

Wir bezeichnen mit W den Schnittpunkt von AI und BC (es gilt dann $D \neq W$). Nach dem Satz von Menelaos im Dreieck AWC gilt für die kollinearen Punkte E, D und P mit gerichteten Strecken, wobei wir AB, BC, CA und AI als positiv betrachten:

$$\frac{AP}{PW} \cdot \frac{WD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1.$$

Daraus folgt

$$\frac{WP}{PA} = -\frac{CE}{EA} \cdot \frac{WD}{DC} = -\frac{WD}{EA}. \tag{4}$$

Die zu zeigende Behauptung ist nach dem Satz von Menelaos (Dreieck ABW, Punkte M, N, P) äquivalent zu

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BM}{MW} \cdot \frac{WP}{PA} = -1.$$

Unter Verwendung von $AN = NB$ und (4) bleibt also zu zeigen, dass

$$\frac{BM}{MW} \cdot \frac{WD}{EA} = 1. \tag{5}$$

Mit den üblichen Bezeichnungen a, b und c für die Dreiecksseiten und $s = (a+b+c)/2$ sowie $w := BW = \frac{ac}{b+c}$ gilt

$$\begin{aligned}
BM &= \frac{a}{2}, \\
EA &= s - a = \frac{b+c-a}{2}, \\
MW &= w - \frac{a}{2} = \frac{2ac - a(b+c)}{2(b+c)} = \frac{a(c-b)}{2(b+c)}, \\
WD &= s - b - w = \frac{a+c-b}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{(a+c-b)(b+c) - 2ac}{2(b+c)} = \\
&= \frac{ab - ac + c^2 - b^2}{2(b+c)} = \frac{(c-b)(c+b-a)}{2(b+c)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt (5) unmittelbar.

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 6. Wir verwenden den folgenden bekannten (und einfach zu zeigenden) Satz:

> *Theorem.* Es seien g und g' zwei Geraden mit Schnittpunkt S, sodass auf g die Punkte X, Y und Z und auf g' die Punkte X', Y' und Z' liegen.
>
> Es gilt: Die drei Geraden XX', YY' und ZZ' sind genau dann kollinear (bzw. parallel), wenn für die Doppelverhältnisse $dv(S, X, Y, Z) = dv(S, X', Y', Z')$ gilt.

Sei nun ∞ der Fernpunkt auf der Gerade AC, das heißt also, der Schnittpunkt von AC mit der parallelen Gerade MN und sei W der Schnittpunkt von AI mit BC.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass $dv(C, A, E, \infty) = dv(C, W, D, M)$ gilt. Das ist analog zu

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CD}{CM}\frac{WM}{WD}.$$

Die Tangentenabschnitte CE und CD sind aber gleich. Wie in Lösung 5 kann man die Längen mit den Seitenlängen a, b, c ausdrücken, einsetzen und sieht, dass die Gleichung stimmt.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 7. Wir beweisen zuerst das folgende Lemma (vgl. Abbildung 5).

> *Lemma.* Es gilt $\sphericalangle APB = 90°$.

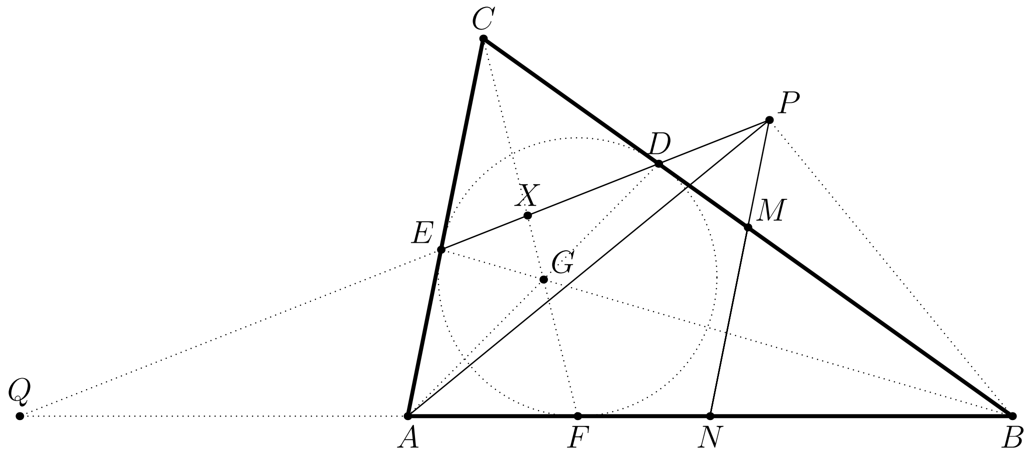

Abbildung 5: Aufgabe 2, Lösung 7

Beweis. Es sei F der Berührpunkt des Inkreises mit der Seite AB. Die Geraden AD, BE und CF schneiden sich im Gergonnepunkt, welcher mit G bezeichnet sei. Der Schnittpunkt von DE mit AB sei Q und der Schnittpunkt von CF mit DE sei X.

Durch Projektion von AB auf DE mit Zentrum G und anschließend von DE zurück auf AB mit Zentrum C erhalten wir

$$dv(A,B,Q,F) = dv(D,E,Q,X) = dv(B,A,Q,F) = dv(A,B,Q,F)^{-1},$$

daher $dv(A,B,Q,F) = -1$. Somit sind auch die Geraden PA, PB, PQ und PF harmonisch.

Weil P auf der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle EAF$ liegt, und $EA = EF$ gilt, ist das Viereck $AFPE$ ein Deltoid. Das heißt, PA ist eine Winkelsymmetrale von PQ und PF, und weil PB dazu harmonisch konjugiert ist, muss PB die andere Winkelsymmetrale sein. Wir erhalten wie gewünscht $\sphericalangle APB = 90°$. ■

Andererseits gilt, dass A, N, B und der Fernpunkt der Gerade AB harmonisch liegen. Somit ist wegen des rechten Winkels bei P jetzt auch PA die Winkelsymmetrale von PN und der Parallelen zu AB durch P. Daraus ergibt sich aber, dass das Viereck, das von den Geraden AN, NP, der Parallelen zu AB durch P und CA gebildet wird, ein Deltoid mit zwei parallelen Seiten ist. Damit sind auch die Seiten AC und NP parallel, somit liegt P wie gewünscht auf der Geraden MN.

(Theresia Eisenkölbl, Josef Greilhuber) □

Aufgabe 3. *Alice und Bob beschließen, eine* 2018*-stellige Zahl im Dezimalsystem ziffernweise von links nach rechts festzulegen, wobei Alice beginnt und die beiden sich abwechseln. Dabei soll folgende Regel gelten: Jede neu genannte Ziffer soll in einer anderen Restklasse modulo* 3 *liegen als die unmittelbar davor genannte.*

Da Bob die letzte Ziffer angeben darf, wettet er, dass es ihm gelingt, dass die Zahl am Ende durch 3 *teilbar ist. Kann Alice das verhindern?*

(Richard Henner)

Lösung 1. Bekanntlich ist jede Zahl kongruent zu ihrer Ziffernsumme im Dezimalsystem modulo 3. Es reicht damit auch, alle Ziffern modulo 3 zu betrachten. Wir können damit ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass nur die Ziffern 1, 2 und 3 verwendet werden.

Im viertletzten Zug achtet Alice darauf, dass die Summe der bis dahin gewählten Ziffern danach nicht durch 3 teilbar ist. Das ist möglich, da Alice zwei Optionen hat, die nicht beide zu Vielfachen von 3 führen können. Nach dem folgenden Zug von Bob hat die Ziffernsumme einen Rest x modulo 3, der nicht der von Bob gewählten Zahl entspricht, da die Ziffernsumme davor kein Vielfaches von 3 war.

Alice darf also im vorletzten Zug x wählen, woraus sich eine Ziffernsumme kongruent zu $2x \equiv -x$ modulo 3 ergibt. Nun müsste Bob wieder x wählen, um auf eine Ziffernsumme kongruent zu $0 \pmod 3$ zu kommen. Das ist aber nicht erlaubt, sodass Bob sein Ziel nicht erreichen kann.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1a. Etwas weniger elegant können wir die Aufgabe auch vom letzten Zug rückwärts gehend über Gewinn- und Verlustpositionen nach relativ lehrbuchhaftem Schema einfach durchrechnen und erhalten damit dieselbe Gewinnstrategie.

O.B.d.A. betrachten wir Ziffern 0, 1 und 2 und möchten wie in der vorigen Lösung eine Ziffernsumme kongruent 0 modulo 3 erreichen.

Die Kurzschreibweise $x(y)$ mit x, $y \in \{0, 1, 2\}$ bedeute ab jetzt „die aktuelle Ziffernsumme ist x, und derzeit verboten zu sagen ist y". Wir modellieren das Spiel als Züge auf einem Graphen mit den 9 möglichen so darstellbaren Situationen als Knoten und den erlaubten Zügen dazwischen als gerichteten Kanten, siehe Abbildung 6.

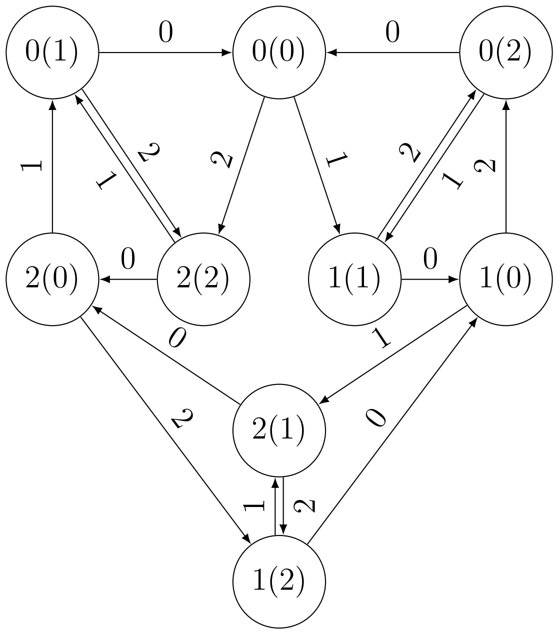

Abbildung 6: Aufgabe 3, Lösung 1a, Mögliche Züge

Um am Spielende zur Ziffernsumme 0 modulo 3 zu gelangen, also zu einem der Knoten 0(0), 0(1) oder 0(2), würde Bob seinen letzten Zug gerne in einem der folgenden Knoten starten:

- 0(1) oder 0(2), von wo er 0 wählen darf,
- 1(0) oder 1(1), von wo er 2 wählen darf, oder
- 2(0) oder 2(2), von wo er 1 wählen darf.

Um das zu verhindern, möchte Alice den vorletzten Zug also in einer der verbleibenden drei Situationen beenden, also in 0(0), 1(2) oder 2(1). Das kann sie erreichen, wenn sie den vorletzen Zug in einer der folgenden Positionen beginnen darf:

- 0(1) oder 0(2), von wo sie 0 wählen und zu 0(0) gehen kann,
- 1(0) oder 1(2), von wo sie 1 wählen und zu 2(1) gehen kann, oder
- 2(0) oder 2(1), von wo sie 2 wählen und zu 1(2) gehen kann.

Im drittletzten Zug möchte Bob daher verhindern, Alice eine solche Situation zu überlassen, d.h. er möchte seinen Zug in einer der drei übrigen Positionen 0(0), 1(1) oder 2(2) beenden. Wenn er seinen Zug in 0(1) beginnt, kann er zu 0(0) oder zu 2(2) gehen, wenn er in 0(2) beginnt, kann er zu 0(0) oder zu 1(1) gehen, und wenn er seinen Zug in 0(0) beginnt, hat er die Wahl zwischen 1(1) oder 2(2). (Anmerkung: In allen drei Fällen würde Bob bereits das Vorliegen von *einem* möglichen Zug ausreichen, um zu gewinnen.) Alle anderen 6 möglichen Startpositionen, also alle der Form $1(x)$ und $2(x)$, sind für Bob aber Verlustpositionen, weil wir im Graph leicht ablesen können, dass jeweils beide möglichen Züge zu Gewinnpositionen für Alice führen.

Im viertletzten Zug möchte Alice daher einen Zug zu einer solchen Position, also einer mit Ziffernsumme 1 oder 2 modulo 3, machen. Das ist ihr sicher möglich, da sie zwei Züge zur Auswahl hat, und nicht beide zu Ziffernsumme 0 führen können. Damit ist im viertletzten Zug jede mögliche Startposition für Alice eine Gewinnposition, sie gewinnt daher das Spiel.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2. O.B.d.A. nennen wir alle Ziffern der 2018-stelligen Zahl 0, 1 oder 2, also benennen sie mit der Restklasse modulo 3, in der sie liegen. Bei Kongruenzen und Restklassen gilt im Folgenden immer der Modul 3, wenn kein anderer Modul angegeben ist.

Lemma. Wenn für eine gerade Zahl k die bis dahin k-stellige Zahl nicht durch 3 teilbar ist, dann gelingt es Alice, dass vier Runden später die bis dann $(k+4)$-stellige Zahl auch nicht durch 3 teilbar ist.

Beweis. Wir definieren Zahlen X und Y folgendermaßen: $\{X, Y\} = \{1, 2\}$, also $X \neq 0$, $Y \neq 0$, $X \neq Y$ und $X + Y \equiv 0$. Dann gilt $X + X \equiv Y$ und $Y + Y \equiv X$.

(a) Wenn an der Stelle k die Zahl 0 steht und die k-stellige Zahl (oBdA) in der Restklasse X liegt, gibt Alice für die Stelle $k+1$ die Zahl X an und Bob antwortet entweder mit 0 oder mit Y.

   i. Antwortet Bob mit 0, so ist die $(k+2)$-stellige Zahl in der Restklasse Y. Gibt nun Alice für die Stelle $k+3$ die Ziffer Y an, so liegt die $(k+3)$-stellige Zahl in der Restklasse X, und, damit die $(k+4)$-stellige Zahl durch 3 teilbar ist, müsste Bob für die Stelle $k+4$ die Ziffer Y angeben, was er aber nicht darf.

   ii. Antwortet Bob mit Y, so ist die $(k+2)$-stellige Zahl in der Restklasse X. Gibt nun Alice für die Stelle $k+3$ die Ziffer X an, so liegt die $(k+3)$-stellige Zahl in der Restklasse Y, und, damit die $(k+4)$-stellige Zahl durch 3 teilbar ist, müsste Bob für die Stelle $k+4$ die Ziffer X angeben, was er aber nicht darf.

(b) Wenn an der Stelle k eine Zahl $\neq 0$ steht und die k-stellige Zahl (oBdA) in der Restklasse X liegt, gibt Alice für die Stelle $k+1$ die Zahl 0 an und Bob antwortet entweder mit X oder mit Y.

   i. Antwortet Bob mit X, so gibt Alice für die Stelle $k+3$ die Zahl Y an. Damit liegt die Ziffernsumme der $(k+3)$-stelligen Zahl wieder in der Restklasse X und Bob müsste mit Y antworten, was er aber nicht darf.

   ii. Antwortet Bob mit Y, so gibt Alice für die Stelle $k+3$ die Zahl 0 an. Die Ziffernsumme der $(k+3)$-stelligen Zahl liegt in der Restklasse 0 und Bob müsste mit 0 antworten, was er aber nicht darf.

In allen Fällen erreicht also Alice, dass die $(k+4)$-stellige Zahl auch nicht durch 3 teilbar ist. ■

Wenn Alice mit 0 beginnt, kann Bob nur mit 1 oder 2 antworten, und die 2-stellige Teilzahl ist sicher nicht durch 3 teilbar. Da 2018 in der Restklasse 2 modulo 4 liegt, kann Alice mithilfe des obigen Hilfssatzes erreichen, dass die 6-stellige, die 10-stellige, … die 2018-stellige Zahl nicht durch 3 teilbar ist.

(Richard Henner) □

Lösung 2a. Wie in den vorherigen Lösungen betrachten wir o.B.d.A. nur Ziffern aus $\{0, 1, -1\}$ und beachten, dass im Dezimalsystem jede Zahl kongruent zu ihrer Ziffernsumme modulo 3 ist.

Wir modellieren das Spiel durch einen Weg in einem gerichteten Graphen. Der Weg beginnt in einem Anfangsknoten I. Wenn nach k Schritten die bisherige Ziffernsumme kongruent zu s und die letzte gewählte Ziffer z ist und als nächste_r Spieler_in S an der Reihe ist, so entspricht das dem Knoten (s, z, S). Es gibt genau dann eine gerichtete Kante von (s, z, S) nach (s', z', S'), wenn $S \neq S'$, $z' \in \{0, 1, -1\}$ mit $z' \neq z$ und $s' \equiv s + z' \pmod 3$ gilt; weiters gibt es die Kanten von I nach (z, z, B) für alle $z \in \{0, 1, -1\}$. Weiters ist der Knoten (s, z, S) äquivalent zum Knoten $(-s, -z, S)$, weil man bis dahin einfach alle Vorzeichen umkehren kann.

Das ergibt den gerichteten Graphen in Abbildung 7.

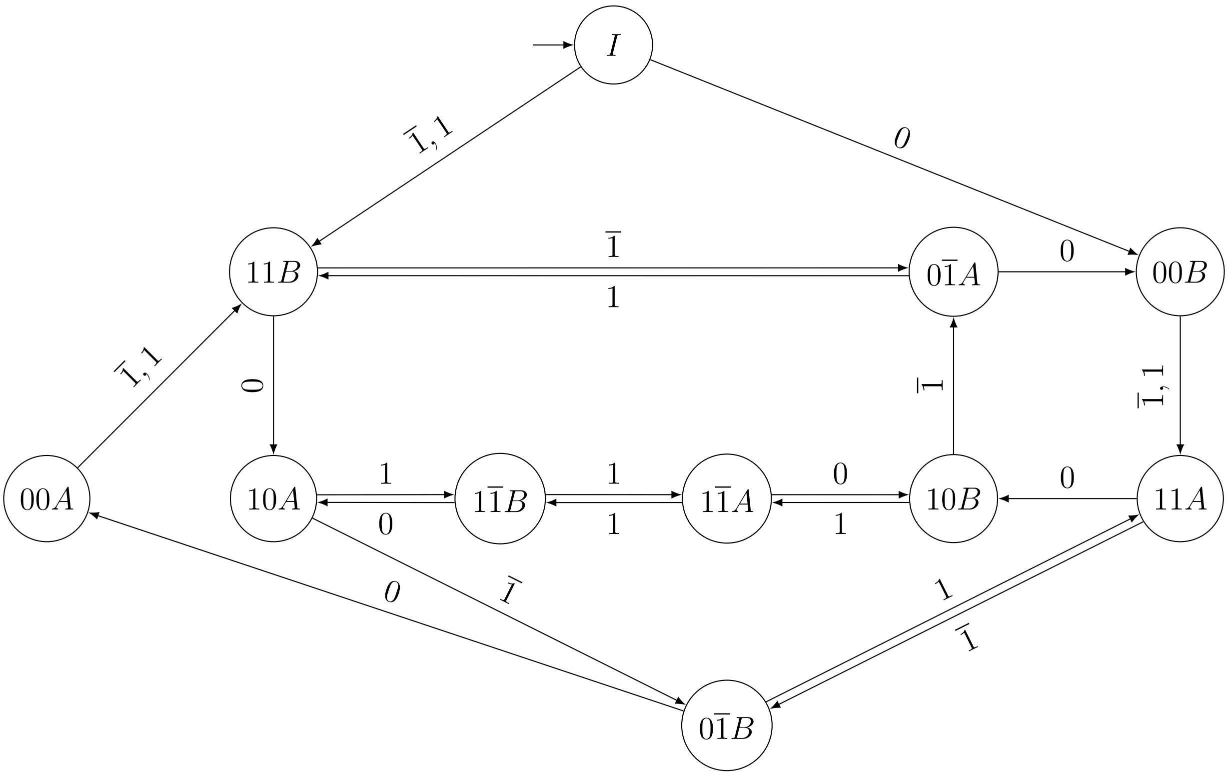

Abbildung 7: Aufgabe 3, Lösung 2a, Mögliche Züge

Wir wählen nun für jeden Knoten (s, z, A) eine ausgehende Kante aus. Das ergibt den Teilgraphen in Abbildung 8. Man sieht leicht, dass jeder Pfad der Länge $\equiv 2 \pmod 4$ in einem der Knoten $(1, 1, A)$, $(1, -1, A)$ oder $(1, 0, A)$ endet, also die entstehende Zahl nicht durch 3 teilbar ist.

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 4. *Es sei M eine Menge von positiven ganzen Zahlen mit den folgenden drei Eigenschaften:*

(1) $2018 \in M$.

(2) Wenn $m \in M$, dann sind auch alle positiven Teiler von m Elemente von M.

(3) Für alle Elemente k, $m \in M$ mit $1 < k < m$ ist auch $km + 1$ ein Element von M.

Man beweise, dass $M = \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gilt.

(Walther Janous)

Lösung 1. Unter https://www.oemo.at/OeMO/Downloads/datei/420/download ist eine App verfügbar, mit der man kleine Fälle durchspielen kann.

Wir beweisen zunächst zwei Lemmata.

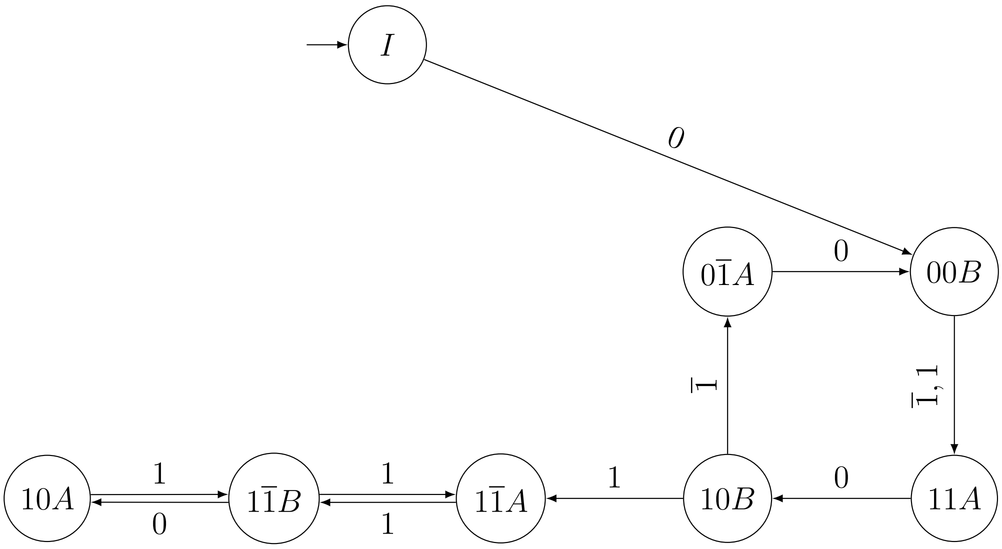

Abbildung 8: Aufgabe 3, Lösung 2a, Teilgraph mit Strategie von A

Lemma. Sei $m \in M$ und m weder 1, noch prim noch Quadrat einer Primzahl. Dann gilt $m+1 \in M$.

Beweis. Sei p der kleinste Primfaktor von m und $a = m/p$. Aufgrund der Voraussetzungen an m und der Wahl von p gilt $a > p$. Nach der zweiten Eigenschaft sind p und a beide Elemente von M, daher nach der dritten Eigenschaft auch $m + 1 = pa + 1$. ∎

Lemma. Sei $\ell \geq 1$. Dann gilt

$$\{1, 2, \dots, \ell\} \subseteq M.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach ℓ. Da $2018 = 2 \cdot 1009$, $2019 = 3 \cdot 673$ und $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$ und $2018 \in M$ laut Angabe, folgt aus dem ersten Lemma, dass auch 2019 und 2020 Elemente von M sind. Nach der zweiten Eigenschaft folgt dann

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq M.$$

Damit ist der Induktionsanfang erbracht.

Wir nehmen nun an, dass für ein $\ell \geq 5$ die Menge $\{1, 2, \dots, \ell\}$ eine Teilmenge von M ist. Falls ℓ gerade ist, so folgt wegen $\ell \geq 5$, dass ℓ weder eine Primzahl noch Quadrat einer Primzahl ist und daher nach dem ersten Lemma $\ell + 1 \in M$ gilt.

Falls $\ell \geq 5$ ungerade ist, so gilt $3 \leq \frac{\ell+1}{2} \leq \ell$: Durch Multiplikation mit 2 und Subtraktion von 1 bzw. ℓ ist das äquivalent zu $5 \leq \ell$ bzw. $1 \leq \ell$. Daher sind 2 und $\frac{\ell+1}{2} \in M$ und nach der dritten Eigenschaft auch $2 \cdot \frac{\ell+1}{2} + 1 = \ell + 2 \in M$. Da damit ℓ und $\ell + 2 \in M$, folgt nach der dritten Eigenschaft $\ell(\ell + 2) + 1 = (\ell + 1)^2 \in M$. Nach der zweiten Eigenschaft folgt auch $\ell + 1 \in M$. ∎

Aus dem zweiten Lemma folgt $\mathbb{Z}_{\geq 1} \subseteq M$, aus der Angabe folgt $M \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Damit ist $M = \mathbb{Z}_{\geq 1}$ bewiesen.

(Clemens Heuberger, Walther Janous) □

Lösung 1a. Wir zeigen zunächst, dass 1, 2, 3, 4, 5 in M sind:

Die Zahlen 1, 2 und 1009 sind als Teiler von 2018 in M. Damit ist auch $2019 = 2 \cdot 1009 + 1$ und der Teiler 3 von 2019 in M. Weiters erhalten wir $7 = 2 \cdot 3 + 1$ und $15 = 2 \cdot 7 + 1$ und damit den Teiler 5 von 15. Mit $16 = 3 \cdot 5 + 1$ erhalten wir dann noch den Teiler 4.

Wir zeigen jetzt mit Induktion, dass $\{1, 2, \dots, 2k - 1\}$ für $k \geq 1$ in M ist.

Bis $k = 3$ ist das schon bewiesen. Sei die Behauptung nun richtig für ein $k \geq 3$, dann müssen wir nur überprüfen, dass $2k$ und $2k + 1$ auch in M sind.

Es gilt aber natürlich $2k + 1 = 2 \cdot k + 1$ und das ist wegen $k \geq 3$ in M. Weiters ist aber dann auch $(2k)^2 = (2k-1)(2k+1) + 1$ und damit auch der Teiler $2k$ in M.

Damit ist der Induktionsbeweis erbracht und daraus folgt, dass M alle positiven ganzen Zahlen enthält.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Wir überprüfen zunächst, dass 1, 2 und 3 in M sind: Die Zahlen 1, 2 und 1009 sind als Teiler von 2018 in M. Damit ist auch $2019 = 2 \cdot 1009 + 1$ und der Teiler 3 von 2019 in M.

Wir zeigen jetzt per Induktion, dass $2^n - 1$ für $n \geq 1$ in M liegt: Der Induktionsanfang ist natürlich erfüllt und es gilt ab $2^n - 1 > 1$, dass $2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ wieder in M liegt wie gewünscht.

Für jede ungerade positive Zahl m gibt es aber (z.B. nach dem Satz von Euler-Fermat) einen Exponenten n, sodass $2^n \equiv 1 \pmod{m}$ ist, da 2 ja teilerfremd zu m ist. Damit ist auch m als Teiler von $2^n - 1$ in der Menge M.

Damit enthält M alle ungeraden positiven ganzen Zahlen.

Sei nun m eine gerade positive Zahl. Wir betrachten die arithmetische Folge $2m-1, 4m-1, 6m-1, \ldots$. Die enthält nicht nur Primzahlen, da sie immer wieder durch jede (ungerade) Primzahl teilbar ist, die m nicht teilt (die Kongruenz $2ma \equiv 1 \pmod{p}$ hat für Primzahlen p mit $p \nmid 2m$ unendlich viele Lösungen a). Darüberhinaus enthält sie auch keine Quadratzahlen, da $2am = 1 + d^2$ modulo 4 keine Lösung hat. Also gibt es ein a mit $2am = kd + 1$ und $1 < k < d$ ungerade. Damit ist $2am$ in M und damit auch der Teiler m.

Also enthält M alle positiven ganzen Zahlen.

Bemerkung. Natürlich kann man im 2. Teil wie in Lösung 1 für gerades m argumentieren, dass $m - 1$ und $m + 1$ und daher auch $m^2 = (m-1)(m+1) + 1$ in M sind, woraus wieder $m \in M$ folgt und ist damit sofort fertig.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 3. Wir erhalten wie in den früheren Lösungen leicht, dass M die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 10 enthält (zum Beispiel 10 als Teiler von 2020).

Wir nehmen nun an, dass die Behauptung nicht stimmt, und wollen einen Widerspruch erhalten.

Es sei daher x die kleinste positive ganze Zahl, die nicht in der Menge M ist (wir wissen bereits, dass $x > 6$ gilt).

> *Lemma.* Für $x > 6$ gilt $\varphi(x) > 2$.
>
> *Beweis.* Es gilt für $x = \prod_{p|x} p_p^{\alpha}$, dass $\varphi(x) = \prod_{p|x} (p^{\alpha} - p^{\alpha-1})$.
>
> Wenn x durch eine Primzahl ≥ 5 geteilt wird, so ist bereits der zugehörige Faktor ≥ 3. Falls x durch 9 geteilt wird, so ist der zugehörige Faktor $\geq 9 - 3 = 6$ und falls x durch 8 geteilt wird, so ist der zugehörige Faktor $\geq 8 - 4 = 4$. Es verbleiben also nur mehr der Fall 12, für den $\varphi(12) = 4$ gilt. ■

Wir behandeln zunächst den Fall $3 \mid x$:

Da es also mindestens drei Zahlen kleiner als x gibt, die zu x teilerfremd sind, können wir ein k wählen, dass teilerfremd zu x ist und für das $1 < k < x - 1$ gilt. Sei nun m der negative inverse Rest zu k modulo x. Da $k \not\equiv \pm 1 \pmod{x}$ ist, gilt das auch für m. Daher sind sowohl k wie auch m in der Menge M und beide sind ungleich 1. Wenn $k = m$ gilt, dann gilt $3 \mid x \mid k^2 + 1$. Das ist aber unmöglich, da ein Quadrat niemals den Rest -1 modulo 3 hat. Damit ist also $km + 1$ in M und damit auch der Teiler x, was den gewünschten Widerspruch ergibt.

Es verbleibt der Fall $3 \nmid x$. In dem Fall kann man aber in der obigen Konstruktion $k = 3$ als teilerfremde Zahl mit $1 < k < x - 1$ wählen und das einzige mögliche Problem tritt für $x \mid 3^2 + 1 = 10$ auf.

Wir haben aber zu Beginn bereits festgestellt, dass alle Teiler von 10 bereits in M liegen. Daher gibt es kein kleinstes x, das nicht in M liegt und alles ist bewiesen.

(Theresia Eisenkölbl, Clemens Heuberger, Veronika Schreitter) □

Lösung 3a. Wir nehmen an, dass die Behauptung nicht stimmt, und wollen einen Widerspruch erhalten.

Es sei daher x die kleinste positive ganze Zahl, die nicht in der Menge M ist. Weiters sei (p_k) die vollständige Folge der Primzahlen in streng monoton wachsender Anordnung und m die größte natürliche Zahl, sodass

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_m \mid x$$

gilt.

Lemma. Für x mit $m \geq 4$ gilt $x > p_{m+1}^2 + 1$.

Beweis. Für $m = 4$ überprüfen wir das direkt: $x \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 122 = 11^2 + 1$.

Für $m \geq 5$ gehen wir folgendermaßen vor: Es gilt nach dem Bertrandschen Postulat, dass

$$\begin{aligned} p_{m+1} &\leq 2p_m \\ p_m &\leq 2p_{m-1} \end{aligned}$$

und daher $p_{m+1}^2 + 1 \leq 4p_m^2 + 1 \leq 8p_{m-1}p_m + 1 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_{m-1}p_m \leq x$. ∎

Wir versuchen nun für $m \geq 4$, Vielfache von x der Form $kp_{m+1}+1$ zu finden, sodass k und p_{m+1} schon in M sind, voneinander verschieden sind und verschieden von 1 sind, um den gewünschten Widerspruch zu bekommen.

Dazu betrachten wir also die Kongruenz

$$kp_{m+1} \equiv -1 \pmod{x}.$$

Da die Primzahl p_{m+1} die Zahl x nach Konstruktion nicht teilt, ist sie teilerfremd zu x und somit gibt es eine Lösung k mit $0 \leq k < x$. Offensichtlich gilt $k \neq 0$. Falls $k = 1$, so folgt $x \mid p_{m+1} + 1$, was einen Widerspruch zu $p_{m+1}^2 + 1 < x$ ergibt. Aus demselben Grund ist auch $k = p_{m+1}$ unmöglich. Wegen $p_{m+1} < x$ und $k < x$ folgen p_{m+1}, $k \in M$ und daher auch $kp_{m+1} + 1 \in M$. Da x diese Zahl teilt, ist es also auch in M, ein Widerspruch zur Definition von x.

Für $m = 3$ stellen wir fest, dass wegen $p_1p_2p_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 8 = p_4 + 1$ schon einmal $x \nmid p_{m+1} + 1$ gilt. Offensichtlich kann aber auch kein Vielfaches von 30 die Zahl $p_4^2 + 1 = 50$ teilen. Damit erhalten wir mit der obigen Konstruktion wieder einen Widerspruch.

Für $m = 2$ gilt wieder, dass Vielfache von $p_1p_2 = 2 \cdot 3 = 6$ nicht die Zahl $p_3^2 + 1 = 26$ teilen können. Damit ein Vielfaches von p_1p_2 die Zahl $p_3 + 1 = 6$ teilt, muss schon $x = 6$ gelten. Für $x = 6$ können wir aber wie in früheren Lösungen überprüfen, dass $x \in M$ gilt. Somit ergibt die obige Konstruktion wieder einen Widerspruch.

Für $m = 1$ müssen wir den Fall ausschließen, dass ein Vielfaches von 2 die Zahl $p_2 + 1 = 4$ oder $p_2^2 + 1 = 10$ teilt. Wir müssen also nur noch einzeln überprüfen, dass 2, 4 und 10 in M sind. Das gelingt aber ähnlich zu den vorigen Lösungen.

Für $m = 0$ ist $p_{m+1} = 2$ und wir müssen nur die Fälle $x < 2$, $x \mid 2 + 1 = 3$ und $x \mid 2^2 + 1$, also $x = 1$, $x = 3$ und $x = 5$ wie in den vorigen Lösungen einzeln überprüfen.

(Theresia Eisenkölbl, Clemens Heuberger, Veronika Schreitter) □

Lösung 4.

Lemma. Sei $k \in M$ mit $k > 1$. Dann gilt auch $k - 1$ in M.

Beweis. Sei $x = k - 1$. Insbesondere gilt $k \equiv 1 \pmod{x}$.

Wähle $m \neq 1 \in M$ mit $m \neq k$ und setze $m_0 = m$. Sei weiters y die Zahl mit $0 \leq y < x$ und $m \equiv -y \pmod{x}$. Wir setzen nun

$$m_{j+1} = k \cdot m_j + 1.$$

Es gilt also $m_{j+1} \equiv m_j + 1 \pmod{x}$ und somit $m_y \equiv 0 \pmod{x}$. Weiters gilt für $1 \leq j \leq y$, dass $m_j \equiv -y + j \not\equiv 1 \pmod{x}$, also $m_j \neq k$ und $m_j \neq 1$. Für m_0 gilt das bereits nach Voraussetzung.

Behauptung: Es gilt $m_j \in M$ für $0 \leq j \leq y$.

Beweis der Behauptung: Für $j = 0$ gilt das nach Konstruktion. Mit Induktion sieht man nun, dass aus $m_j \in M$ auch $m_{j+1} = k \cdot m_j + 1 \in M$ folgt, da zusätzlich $m_j \neq 1$, $k \in M$, $k \neq 1$ und $k \neq m_j$ gilt.

Damit ist aber $m_y \in M$ und damit auch dessen Teiler x. ■

Da also für jede Zahl in M auch alle kleineren positiven ganzen Zahlen in M sind, bleibt nur noch zu zeigen, dass M beliebig große Zahlen enthält. Das ist aber natürlich richtig, weil man immer die beiden größten bereits bekannten Zahlen in M als k und m wählen kann und so eine noch größere Zahl $km + 1$ in M erhält. Daher ist also wirklich $M = \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

(Jakob de Raaij, Theresia Eisenkölbl, Clemens Heuberger) □