1. Man zeige: Es muss Dateien geben, die beim „zippen“ nicht kleiner werden.

2. Man zeige: Aus 12 verschiedenen zweistelligen Zahlen kann man immer zwei wählen, deren Differenz eine zweistellige Zahl mit zwei gleichen Ziffern ist.

3. Um einen kreisrunden Tisch sitzen in gleichen Abständen 12 Personen: 7 Ritter und 5 Knappen. Man zeige, dass zwei Ritter einander gegenüber sitzen.

4. Bei der 50-Jahr-Feier der ÖMO stehen 2019 Sessel in einer langen Reihe nebeneinander. Insgesamt 1347 Personen nehmen darauf Platz. Man zeige, dass es dann irgendwo drei benachbarte Sessel gibt, die alle drei besetzt sind.

5. Man bestimme die maximale Anzahl von Elementen in einer Teilmenge L von $\{1, 2, \dots, 1999\}$ sodass die Differenz von keinen zwei Elementen aus L gleich 4 ist.

6. Auf ein 8×8-Schachbrett werden 33 Türme gestellt. Man zeige, dass man 28 davon entfernen kann, sodass die restlichen fünf einander nicht bedrohen.

7. In einem regelmäßigen 6-Eck wird jede Ecke mit jeder anderen Ecke verbunden, und jede solche Verbindung wird entweder rot oder blau gefärbt. Man zeige, dass es unter den Verbindungen ein Dreieck aus drei roten Seiten oder ein Dreieck aus drei blauen Seiten gibt (oder beides).

8. In einem regelmäßigen 6-Eck wird jede Ecke mit jeder anderen Ecke verbunden, und jede solche Verbindung wird entweder rot oder blau gefärbt. Man zeige, dass es unter den Verbindungen **zwei** einfarbige Dreiecke gibt.

9. Auf einer Party begrüßen sich einige der Gäste mit Handschlag. Man zeige, dass es zu jedem Zeitpunkt zwei Gäste gibt, die genau gleich vielen verschiedenen Personen bereits die Hand gegeben haben.

10. Auf einer Orange werden 5 Punkte mit Filzstift markiert. Man zeige, dass es möglich ist die Orange so in zwei Hälften zu zerschneiden, dass eine Hälfte mindestens 4 Punkte enthält. (Punkte auf der Schnittfläche sind Teil beider Hälften.)

11. Man zeige: Jede Menge von n natürlichen Zahlen enthält eine nicht-leere Teilmenge, für die die Summe ihrer Elemente durch n teilbar ist.

12. Man zeige, dass es unter den 2017 Zahlen 1, 11, 111, $\dots$, $\underbrace{111\dots111}_{2017}$ eine gibt, die durch 2017 teilbar ist.

13. Man zeige: In einer Menge von 1002 verschiedenen positiven ganzen Zahlen kleiner als 2002 gibt es immer drei verschiedene Zahlen derart, dass eine der drei Zahlen die Summe der beiden anderen ist.

14. Gary trainiert für einen Marathon. Im April trainiert er jeden Tag mindestens ein Mal, und insgesamt 45 Mal. Man zeige: Es existiert eine Zeitspanne von aufeinanderfolgenden Tagen, an denen er in Summe genau 14 Mal trainiert.

15. Man zeige: Für jede Zahl n ist die Fibonacci-Folge periodisch modulo n.

16. Man zeige: Es existiert eine Fibonacci-Zahl, die mit vier Nullen endet.

17. Gibt es a) vier, b) fünf verschiedene positive ganze Zahlen derart, dass die Summe von je drei dieser Zahlen eine Primzahl ist?

18. (Chinesischer Restsatz) Man zeige mit Schubfachschluss: Wenn m und n zwei teilerfremde positive ganze Zahlen sind und a und b zwei beliebige ganze Zahlen, dann existiert eine ganze Zahl x, sodass $x \equiv a \pmod{m}$ und $x \equiv b \pmod{n}$.

19. Der gebrochene Anteil $\{x\}$ einer Zahl x ist definiert als $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.

    Wir betrachten die gebrochenen Anteile $\{n \cdot \sqrt{3}\}$ für alle positiven ganzen Zahlen n. Man zeige, dass darunter einer ist, der kleiner als 0,01 ist.

20. Es sei N eine positive ganze Zahl. Eine Menge $S \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ heißt *erlaubt*, falls sie keine drei paarweise verschiedene Elemente a, b, c enthält, so dass a ein Teiler von b und b ein Teiler von c ist. Man bestimme die größtmögliche Anzahl von Elementen in einer erlaubten Menge S.

21. Sei $S = \{1, 2, \dots, 280\}$. Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl n, sodass jede n-elementige Teilmenge von S fünf paarweise teilerfremde Zahlen enthält.

1. 2019 Münzen liegen auf einem Stapel. Zwei Personen spielen abwechselnd. Wer am Zug ist, darf 1, 2 oder 4 Münzen nehmen. Es gewinnt, wer die letzte Münze nimmt. Wer von beiden hat eine Gewinnstrategie?

2. Dan und Sam spielen ein Spiel, in dem sie abwechselnd ziehen. Dan sagt 1, Sam sagt 2. Ab dann muss jeder eine Zahl sagen, die echt größer als die zuvor genannte, und echt kleiner als das Dreifache davon ist. Wer 99 sagt, gewinnt. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

3. Anna und Berta spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd Murmeln vom Tisch nehmen. Anna macht den ersten Zug. Wenn zu Beginn eines Zuges $n \geq 1$ Murmeln am Tisch sind, dann nimmt die Spielerin, die am Zug ist, k Murmeln weg, wobei $k \geq 1$ entweder eine gerade Zahl mit $k \leq \frac{n}{2}$ oder eine ungerade Zahl mit $\frac{n}{2} \leq k \leq n$ ist. Eine Spielerin gewinnt das Spiel, wenn sie die letzte Murmel vom Tisch nimmt.

   Man bestimme die kleinste Zahl $N \geq 100\,000$, sodass Berta den Sieg erzwingen kann, falls anfangs genau N Murmeln am Tisch liegen.

4. Auf der Tafel steht die Zahl $1\,000\,000$. A und B ziehen abwechselnd, wobei in jedem Zug die Zahl n an der Tafel entweder durch $n-1$ oder durch $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ersetzt wird. Wer die Zahl 1 an die Tafel schreibt, gewinnt. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

5. Zwei Personen spielen auf einem 2019×50-Brett. Sie beginnen mit einem Stein in der unteren linken Ecke. Wer am Zug ist, darf den Stein entweder um 1 oder 2 Felder nach rechts schieben, oder ins linkeste Feld der nächsthöheren Reihe setzen. Wer den letzten Zug macht, gewinnt. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

6. („Chomp“) Das linke untere Eck einer $m \times n$-Schokoladentafel ist vergiftet. Wer am Zug ist, wählt ein noch vorhandenes Stück Schokolade und beißt das gesamte Rechteck vom gewählten Stück bis zum rechten oberen Eck herunter. Wer das vergiftete Stück essen muss, verliert.

7. Auf einem $m \times n$-Schachbrett steht am linken unteren Feld ein Turm. A und B fahren abwechelnd damit, beginnend mit A. In jedem Zug kann der Turm beliebig weit nach oben oder nach rechts bewegt werden. Wer den Turm auf das rechte obere Feld bewegt, gewinnt. Man bestimme alle Paare (m, n), für die A eine Gewinnstrategie hat.

8. Alice und Bob setzen abwechselnd Steine auf ein Schachbrett, wobei Alice beginnt. Dabei darf niemals ein Stein waagrecht oder senkrecht direkt neben einen anderen gesetzt werden oder in dasselbe Feld gesetzt werden. Wer keinen Stein mehr setzen kann, verliert. Zeige, dass Bob immer gewinnen kann, egal, was Alice macht.

9. Gegeben sei ein $m \times n$-Feld, wobei m und n positive ganze Zahlen sind. Zwei Spieler färben abwechselnd die Zellen (mit der gleichen Farbe). In jedem Zug darf der Spieler entweder eine ungefärbte Zelle oder zwei ungefärbte Zellen mit einer gemeinsamen Seite färben. Der Gewinner ist derjenige, der die komplette Färbung des Feldes erzielt. Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie?

10. A und B spielen das folgende Spiel: Zuerst schreibt A eine Permutation der Zahlen von 1 bis n an die Tafel, wobei n eine ganze Zahl größer als 1 ist. Dann ziehen sie abwechselnd. Wer am Zug ist, muss eine Zahlenfolge an die Tafel schreiben, die noch nie an der Tafel gestanden ist, und die entweder eine Permutation der vom anderen Spieler geschriebenen Zahlenfolge ist, oder aus dieser entsteht, indem man genau eine Zahl entfernt. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

11. Alice und Bob setzen einen Springer auf ein Schachbrett und ziehen abwechselnd mit diesem, Alice beginnt. In jedem Zug darf der Springer nach den normalen Regeln bewegt werden, darf jedoch auf keinem schon einmal benutzen Feld ein zweites Mal stehen bleiben. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

12. („5×5 Tic-Tac-Toe“) Man zeige: Wenn man Tic-Tac-Toe auf einem 5×5-Brett spielt, kann die zweite Person am Zug zumindest ein Unentschieden erzwingen.

13. Auf einer Tafel stehen $n \geq 3$ positive ganze Zahlen. Ein Zug besteht darin, drei Zahlen a, b, c auf der Tafel auszuwählen, sodass diese die Seiten eines nicht-ausgearteten nicht-gleichseitigen Dreiecks bilden, und sie durch $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ zu ersetzen.

    Man zeige, dass es keine unendliche Zugfolge geben kann.

14. A und B spielen abwechselnd auf einer 5×5-Tabelle. A trägt in jedem Zug einen Einser in ein leeres Feld ein, und B trägt immer 0 in ein leeres Feld ein. Wenn das Brett voll ist, wird die Summe der Zahlen in jedem der neun 3×3 berechnet und der Punktestand von A ist die größte dieser Summen. Was ist der größtmögliche Punktestand, den A erreichen kann, unabhängig davon, wie B spielt?

1. Gegeben sind 7 Strecken, von denen keine länger als 12 cm und keine kürzer als 1 cm ist. Man beweise, dass es darunter drei gibt, die Seitenlängen eines Dreiecks sein können.

2. Man zeige: Unter 15 Zahlen, die nicht größer als 2019 und paarweise teilerfremd sind, gibt es mindestens eine Primzahl.

3. In einer Schulklasse sind 24 Schülerinnen, deren Gesamtalter 241 Jahre beträgt. Man beweise, dass es in dieser Klasse 15 Schülerinnen gibt, deren Gesamtalter 150 Jahre übersteigt.

4. Man beweise, dass das Produkt von n aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch $n!$ teilbar ist.

5. Man beweise: Es gibt keine positive ganze Zahl n, sodass $n \cdot \sqrt{2}$ eine natürliche Zahl ist.

6. Man beweise, dass es keine positiven ganzen Zahlen a, b und c gibt, für die $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 b^2$ gilt.

7. Man zeige, dass für alle reellen Zahlen a, b, c die Ungleichung $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ gilt.

8. Man beweise: In jedem konvexen Fünfeck kann man drei Diagonalen auswählen, aus denen man ein Dreieck konstruieren kann.

9. Beweise die folgende Behauptung: Jedes Tetraeder hat eine Ecke, für die gilt: Sind a, b und c die Längen der von dieser Ecke ausgehenden Kanten, dann existiert ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c.

10. In einem Graph haben alle Knoten einen Grad von mindestens δ. Man zeige, dass ein Pfad mit einer Länge von mindestens $\delta + 1$ existiert.

11. In der einklassigen Raacher Volksschule hat jedes Kind höchstens drei Feinde. Man beweise, dass man die Kinder der Schule so in zwei Klassen einteilen kann, dass jedes Kind in seiner Klasse höchstens einen Feind hat.

12. Man zeige: Es ist in jedem Graph möglich, die Knoten so mit zwei Farben zu färben, dass jeder Knoten mindestens gleich viele Nachbarn der anderen Farbe wie Nachbarn der gleichen Farbe hat.

13. In einer Stadt gibt es drei Schulen und in jeder dieser Schulen gibt es genau n SchülerInnen. JedeR SchülerIn hat insgesamt genau $n + 1$ Bekannte in den anderen beiden Schulen. (Bekanntschaft ist gegenseitig.) Man beweise, dass man in jeder Schule eineN SchülerIn auswählen kann, sodass die drei gewählten SchülerInnen einander kennen.

14. Jedes Eck eines regelmäßigen 1997-Ecks wird so mit einer ganzen Zahl beschriftet, dass die Summe aller Zahlen gleich 1 ist. Beginnend bei einem beliebigen Eck gehen wir gegen den Uhrzeigersinn um das gesamte 1997-Eck und schreiben die Beschriftungen der Reine nach auf. Ist es möglich, das Eck, von dem gestartet wird, so zu wählen, dass die Summe der ersten k aufgeschriebenen Zahlen für $k = 1, 2, 3, \ldots, 1997$ positiv ist?

15. Man zeige, dass die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks in der Ebene nicht alle ganzzahlige Koordinaten haben können.

16. Die Zahlen von 1 bis n^2 werden auf ein $n \times n$ Schachbrett verteilt, wobei auf jedes Feld genau eine Zahl geschrieben wird. Man zeige, dass es ein Paar von horizontal, vertikal oder diagonal benachbarten Feldern gibt, deren Werte sich um mindestens $n + 1$ unterscheiden.

17. Sei n eine positive ganze Zahl und $\{A, B, C\}$ eine Partitionierung von $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ sodass $|A| = |B| = |C| = n$. Man zeige, dass drei Zahlen $x \in A$, $y \in B$ und $z \in C$ existieren, sodass eine davon die Summe der beiden anderen ist.

18. Man finde alle Tupel (m, n) positiver ganzer Zahlen, für die eine Menge von Farben $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ (mit $k \geq 1$) und eine Färbung der mn Einheitsquadrate eines $m \times n$ Schachbretts mit diesen Farben existiert, sodass für jede Farbe c_i und jedes Feld S mit Farbe c_i genau zwei horizontal oder vertikal benachbarte Felder dieselbe Farbe c_i haben.

19. Sei X eine n-elementige Menge und seien A_1, A_2, …, A_m Teilmengen von X sodass

    - $|A_i| = 3$ für $i = 1, 2, \ldots, m$ und
    - $|A_i \cap A_j| \leq 1$ für alle verschiedenen Indizes i und j.

    Man zeige, dass eine Teilmenge von X existiert, die mindestens $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ Elemente enthält und keine der A_i vollständig enthält.

20. Man zeige, dass ein Würfel nicht so in kleinere Würfel zerteilt werden kann, dass diese alle unterschiedlich groß sind.

1. In die Felder einer $n \times m$-Tabelle werden zufällig die Werte -1 und 1 eingetragen. Anschließend darf man beliebig oft in einer ausgewählten Zeile oder Spalte alle Vorzeichen umdrehen. Zeige, dass es möglich ist, durch eine Folge solcher Schritte zu erreichen, dass alle Zeilen- und Spaltensummen in der Tabelle nichtnegative ganze Zahlen sind!

2. Am Tisch liegen 2019 rote, 50 gelbe und 29 blaue Murmeln. Ein Spielzug besteht darin, zwei verschiedenfarbige Murmeln zu entfernen und eine Murmel der dritten Farbe hinzuzufügen. Dies wird so lange wiederholt, bis nur noch Murmeln einer einzigen Farbe übrig sind. Welche Farbe bleibt übrig?

3. An der Tafel stehen die Zahlen von 1 bis 2019. In jedem Zug streicht man zwei Zahlen und ersetzt sie durch ihre absolute Differenz. Bleibt am Schluss eine gerade oder eine ungerade Zahl stehen?

4. Löse die Gleichung $n + S(n) + S(S(n)) = 2018$, wobei $S(x)$ die Ziffernsumme von x ist.

5. Gegeben ist ein 8×8 Schachbrett, das normal gefärbt ist. In jedem Zug darf man die Farbe von allen Feldern einer Zeile, oder allen Feldern einer Spalte, oder allen Feldern eines 2×2 Quadrats, ändern. Kann man erreichen, dass am Ende genau ein schwarzes Feld übrig bleibt?

6. Ein rechteckiges Bodenstück ist mit rechteckigen Platten der Form 1×4 und 2×2 ausgelegt. Eines Tages wird eine Platte versehentlich zerschlagen, aber man hat noch eine Platte der anderen Form übrig. Kann man die Platten neu anordnen und den Boden damit wieder vollständig auslegen?

7. Ein 8×8 Schachbrett wird mit 21 Trominos (3×1 Rechtecke) belegt, sodass genau ein Feld nicht von einem Tromino überdeckt wird. Trominos dürfen sich nicht überlappen und nicht über das Brett hinausstehen. Man bestimme alle möglichen Positionen des Feldes, das nicht von einem Tromino überdeckt ist.

8. Auf ein Feld eines 5×5 Schachbretts schreiben wir -1, auf die anderen 24 Felder jeweils $+1$. In jedem Zug darf man ein $a \times a$ Teilquadrat mit $a > 1$ wählen und darin alle Vorzeichen ändern. Ziel ist es, dass auf allen Feldern $+1$ steht. Auf welchem Feld sollte zu Beginn -1 stehen, damit dieses Ziel erreicht werden kann?

9. Gegeben seien die Zahlen 0, 1 und $\sqrt{2}$. In jedem Zug wird eine der Zahlen ausgewählt und ein beliebiges rationales Vielfaches der Differenz der anderen beiden Zahlen addiert. Ist es möglich, dass man durch Anwendung dieser Operation nach einigen Schritten das Tripel $(0, \sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$ erreicht?

10. An jeder Ecke eines Quadrats liegt ein Stein. Man darf die Anzahl der Steine nach folgenden Regeln vergrößern: Wenn man an einer Ecke eine beliebige Anzahl an Steinen entfernt, so muss man bei einer benachbarten Ecke doppelt so viele Steine dazulegen. Ist es möglich, nach einer endlichen Anzahl von solchen Vorgängen an vier aufeinanderfolgenden Eckpunkten folgende Steinzahlen liegen hat: 1989, 1988, 1990 und 1989?

11. An der Tafel stehen vier verschiedene natürliche Zahlen. In jedem Zug benennt man die vier Zahlen nach Belieben mit a, b, c und d und ersetzt sie durch $a - b$, $b - c$, $c - d$ und $d - a$. Man zeige, dass nach endlich vielen Zügen mindestens eine Zahl an der Tafel steht, deren Betrag größer als 2019 ist.

12. Eine Folge beginnt mit $1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 5, \ldots$, wobei ab dem siebenten Folgenelement jedes Folgenelement die Einerziffer der Summe der vorhergehenden 6 Folgenelemente ist. Man zeige, dass diese Folge keine aufeinanderfolgende Teilfolge $0, 1, 0, 1, 0, 1$ enthält.

13. Die Zahlen von 1 bis 2019 stehen an der Tafel. In jedem Zug entfernt man zwei beliebig gewählte Zahlen a und b und ersetzt sie durch $\frac{ab}{a+b}$. Das wird so lange fortgesetzt, bis nur noch eine Zahl an der Tafel steht. Man bestimme den größtmöglichen und kleinstmöglichen Wert dieser Zahl.

14. Einige Steine liegen auf einem in beide Richtungen unendlichen Streifen aus Quadraten. Solange auf einem Feld mindestens zwei Steine liegen, darf man zwei davon nehmen und einen auf das vorhergehende und einen auf das nächste Feld legen. Ist es möglich, nach endlich vielen Zügen wieder zur Startkonfiguration zurückzukehren?

15. Gegeben ist ein Stapel aus $2n + 1$ Spielkarten. Man kann auf zwei Arten mischen:

    - „Cut“: Beliebig viele Karten oben vom Stapel nehmen und in derselben Reihenfolge unter den Stapel legen.
    - „Perfect riffle shuffle“: Die obersten n Karten vom Stapel nehmen und genau zwischen die verbliebenen $n + 1$ Karten einsortieren.

    Man zeige, dass man, egal wieviele dieser Operationen man durchführt, maximal $2n(2n + 1)$ verschiedene Reihenfolgen des Kartenstapels erhalten kann.